





# *Kapitel 7*

## ***Das Standardmodell***

Christoph Berger

### **Einführung**

Das ganze Buch behandelt im Grunde genommen das Standardmodell der Teilchenphysik. In einem Kapitel, das diesen Namen als Überschrift trägt, befassen wir uns noch einmal mit einigen wichtigen und teilweise neuen Aspekten des Modells, dessen physikalischer Inhalt sich in wenigen Sätzen formulieren lässt: Die Materie wird aus je drei Familien von Leptonen

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

und Quarks

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

aufgebaut. Wie bereits im letzten Abschnitt besprochen, sind Leptonen und Quarks Basiszustände der Gruppe  $SU2_L \otimes U1$ , deren Erzeugende der schwache Isospin und die schwache Hyperladung sind. Die Quark-Eigenzustände zu  $SU2_L$  mit  $I_{3,L} = -1/2$  gehen aus einer verallgemeinerten Cabibbo-Rotation der  $d$ -,  $s$ - und  $b$ -Quarks hervor (Abschn. ??). Die Quarks tragen zusätzlich Farbladungen, sie sind Eigenzustände der Gruppe  $SU3_C$ . Man bezeichnet das Standardmodell daher oft als das  $SU3_C \otimes SU2_L \otimes U1$ -Modell.

---

C. Berger, Prof. Dr.

I. Physikalisches Institut, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland. E-mail: [berger@rwth-aachen.de](mailto:berger@rwth-aachen.de)

Wechselwirkungen zwischen den Konstituenten sind vom Strom-Feld-Typ. Die zwischen den einzelnen Mitgliedern der Gruppe  $SU2_L \otimes U1$  ausgetauschten Kraftquanten der elektroschwachen Wechselwirkung sind das Photon und die  $W^+$ -,  $W^-$  und  $Z^0$ -Bosonen. Die starke Wechselwirkung beruht auf dem Austausch von Gluonen zwischen den Basiszuständen der Gruppe  $SU3_C$ .

Im weiteren Verlauf der Diskussion werden wir genauer als im letzten Abschnitt begründen, dass es noch ein weiteres fundamentales Teilchen, das skalare Higgs-Boson, geben muss. Mit ihm werden wir uns in Abschn. ?? ausführlich beschäftigen.

## 7.1 Die Neutrino-Elektron-Streuung

Als erster Anwendung der gerade entwickelten Feynman-Regeln wenden wir uns der Berechnung des Wirkungsquerschnitts der elastischen  $\nu_\mu e$ -Streuung (Abb. 6.20) unter Austausch eines  $Z^0$ -Bosons zu. Wir beginnen mit den Elektronen negativer Helizität. In der Hochenergiénäherung erhalten wir für das Matrixelement den Ausdruck

$$\begin{aligned} T_{fi}(\nu_\mu e_L \rightarrow \nu_\mu e_L) \\ = \frac{-g^2}{\cos^2 \Theta_W} \frac{1}{q^2 - M_Z^2} c_\nu c_L \bar{u}_L(p') \gamma^\nu u_L(p) \bar{u}_L(k') \gamma_\nu u_L(k) . \end{aligned} \quad (7.3)$$

Zur Vereinfachung der Notation wurden die Abkürzungen  $c_{L,e} = c_L$  und  $c_{L,\nu} = c_\nu$  für die Kopplungen des Elektrons und des Neutrinos gewählt. Wir benutzen wie üblich die Näherung  $|q^2| \ll M_Z^2$  und führen die Abkürzung

$$\varrho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \Theta_W} \quad (7.4)$$

ein. Damit gelangt man – analog zum Vorgehen in Abschn. 6.1 – zu

$$T_{fi}(\nu_\mu e_L) = 8\sqrt{2} c_\nu c_L G_F \varrho s . \quad (7.5)$$

Für die Streuung an rechtshändigen Elektronen gilt andererseits

$$T_{fi}(\nu_\mu e_R) = -8\sqrt{2} c_\nu c_R G_F \varrho u . \quad (7.6)$$

Daraus lässt sich ohne weitere Schwierigkeiten der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktssystem nach den üblichen Vorschriften zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e) = \frac{1}{\pi^2} \varrho^2 G_F^2 s_0 c_\nu^2 \left( c_L^2 + \frac{c_R^2(1+\cos\Theta)^2}{4} \right) \quad (7.7)$$

ableiten, woraus nach Integration über den Streuwinkel  $\Theta$

$$\sigma(\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e) = \frac{4}{\pi} \varrho^2 G_F^2 s_0 c_\nu^2 \left( c_L^2 + \frac{1}{3} c_R^2 \right) \quad (7.8)$$

folgt.

Die letzte Formel können wir noch im Laborsystem für die Streuung von Neutrinos der Energie  $E$  an ruhenden Elektronen der Masse  $m$  auswerten, wobei wir gleichzeitig die Werte des GSW-Modells für  $c_L$ ,  $c_R$  und  $c_\nu$  einsetzen,

$$\sigma(\nu_\mu e \rightarrow \nu_\mu e) = \frac{1}{\pi} \varrho^2 G_F^2 2mE \left[ \left( \sin^2 \Theta_W - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \sin^4 \Theta_W \right] . \quad (7.9)$$

Die Rechnung für die Streuung von Antineutrinos enthält nichts Neues. Ihr Resultat lautet

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e \rightarrow \bar{\nu}_\mu e) = \frac{4}{\pi} \varrho^2 G_F^2 s_0 c_\nu^2 \left( \frac{1}{3} c_L^2 + c_R^2 \right) . \quad (7.10)$$

Im Prinzip lassen sich aus der Messung der Wirkungsquerschnitte für elastische  $\nu_\mu$ - bzw.  $\bar{\nu}_\mu$ -Streuung die Parameter  $\varrho$  und  $\sin^2 \Theta_W$  der Theorie bestimmen. Die Experimente sind sehr gut mit

$$\sin^2 \Theta_W = 0,230 \quad (7.11)$$

und

$$\varrho = 1 \quad (7.12)$$

verträglich. Der  $\varrho$ -Parameter misst das Verhältnis der neutralen zur geladenen schwachen Wechselwirkung. Die gute Beschreibung der Experimente durch  $\varrho = 1$  ist sehr wichtig, da diese Beziehung im GSW-Modell vorhergesagt wird. Um das zu beweisen, muss man aber wiederum den Eichfeldcharakter der Theorie und die spontane Symmetriebrechung studieren. Da dies weit über den Rahmen dieses Buches hinausgeht, muss ich den Leser auf die Literatur verweisen [Qui13, Pes95]. Einige Anmerkungen finden sich im Kasten

in Abschn. ?? Es ist üblich, die Beziehung  $\varrho = 1$  in Form einer neuen Definitionsgleichung

$$\sin^2 \Theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad (7.13)$$

für den Weinberg-Winkel auszudrücken.

Aus der ersten Gleichung (6.146) und (6.5) gewinnen wir nun eine Vorhersage für  $M_W$  aus der Fermi-Konstanten, der Feinstrukturkonstanten und dem Weinberg-Winkel,

$$M_W^2 = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}G_F \sin^2 \Theta_W} . \quad (7.14)$$

Hierbei ist es sehr praktisch, die Abkürzung

$$M_F^2 = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2}G_F} \quad (7.15)$$

einzuführen, in der nur präzise gemessene Naturkonstanten auftauchen. Numerisch gilt

$$M_F = 37,2804 \text{ GeV} , \quad (7.16)$$

woraus sich mit  $\sin^2 \Theta_W = 0,23$  eine  $W$ -Masse von 77,7 GeV und wegen (7.13) eine  $Z^0$ -Masse von 88,6 GeV ergibt.

Die experimentellen Werte der  $W$ - und  $Z^0$ -Massen

$$\begin{aligned} M_W &= 80,385 \pm 0,015 \text{ GeV} \\ M_Z &= 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (7.17)$$

sind um viele Standardabweichungen von den obigen Vorhersagen entfernt. Es gibt keinen Wert des Weinbergwinkels, mit dem man die experimentellen Massenwerte innerhalb der Fehler reproduzieren kann. Gerade dies wird aber zu einem entscheidenden Triumph der Theorie, denn die aus (7.13) und (7.14) berechneten Massenwerte sind Resultate der Bornschen Näherung, die durch die elektroschwachen Strahlungskorrekturen modifiziert werden. Die Abb. 7.1 zeigt die einfachsten Diagramme, die auf dem Ein-Schleifen-Niveau zur Modifikation der Boson-Propagatoren beitragen. Häufig wird das Schema der sehr komplizierten Berechnungen der Strahlungskorrektur so angelegt, dass (7.14) zu

$$M_W^2 = \frac{M_F^2}{\sin^2 \Theta_W (1 - \Delta r)} \quad (7.18)$$

abgeändert wird, während (7.13) erhalten bleibt. Das ist das sog. *on shell*-Schema. Die führenden Beiträge zu  $\Delta r$  sind durch

$$\Delta r = \Delta r_0 - \frac{\Delta \varrho_t}{\tan^2 \Theta_W} \quad (7.19)$$

gegeben. Hierin beschreibt

$$\Delta r_0 = 1 - \frac{\alpha}{\alpha(M_Z^2)} \quad (7.20)$$

die Änderung der Feinstrukturkonstanten, die durch die  $q^2$ -Abhängigkeit der elektromagnetischen Kopplung hervorgerufen wird. Sie wurde in Abschn. 3.1.4 zu 0,07 abgeschätzt, eine genauere Rechnung ergibt einen Wert von 0,06635 mit einer Unsicherheit von 10 in den letzten beiden Stellen. Der Anteil des *top*-Quarks in den Schleifen der Abb. 7.1 wird durch

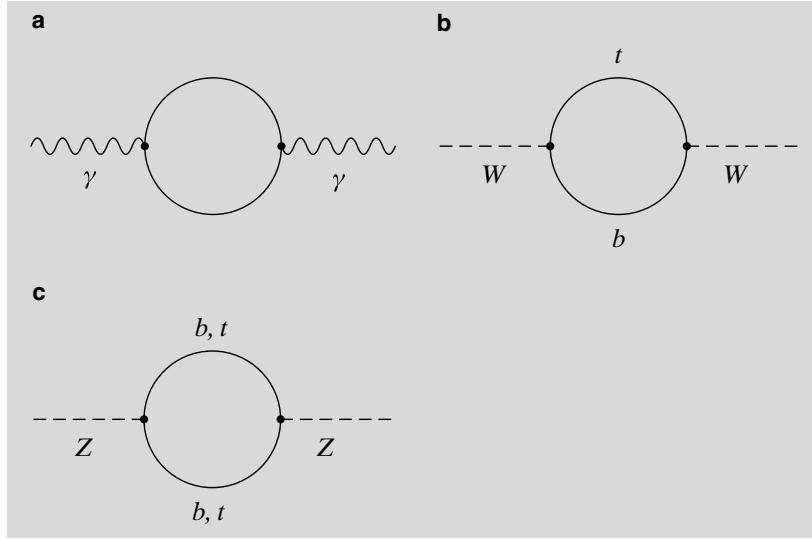
$$\Delta \varrho_t = \frac{3G_F m_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \quad (7.21)$$

bestimmt. Der Einfluss aller anderen Fermionen ist infolge ihrer kleinen Masse vernachlässigbar. Numerisch gilt  $\Delta \varrho_t = 0,0096(m_t/175)^2$ , worin die *top*-Masse in GeV einzusetzen ist. Damit erhalten wir  $\Delta r = 0,0335$ , wobei  $m_t = 173,4$  GeV benutzt wurde, wie es durch die direkten Messungen der *top*-Masse nahegelegt wird.

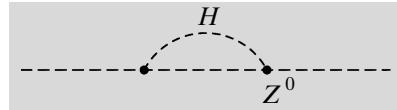
Die  $Z^0$ -Masse ist besonders genau gemessen worden. Neben den ebenfalls sehr präzise bekannten Werten von  $\alpha$  und  $G_F$  ist sie der dritte fundamentale Parameter der elektroschwachen Theorie. Da auch die  $W$ -Masse nur noch einen Fehler von etwa 0,02 % hat, liefert die Anwendung von (7.13)

$$\sin^2 \Theta_W = 0,2229 \pm 0,0003 . \quad (7.22)$$

Einsetzen in (7.18) gibt unter Benutzung des gerade berechneten Wertes von  $\Delta r$  eine  $W$ -Masse von 80,32 GeV mit einem Fehler, der hier allein auf Grund der Unsicherheit in  $\sin^2 \Theta_W$  etwa 0,1 GeV beträgt. Die Übereinstimmung der Parameter der elektroschwachen Theorie mit den experimentellen Werten wird verbessert, wenn in den Strahlungskorrekturen auch der Austausch von Higgs-Bosonen berücksichtigt wird. Abbildung 7.2 zeigt einen der vielen beitragenden Graphen. Die Korrekturen hängen logarithmisch von  $M_H/M_W$  ab. Das von der PDG zitierte Ergebnis  $M_W = 80,381 \pm 0,014$  GeV der Fits stimmt hervorragend mit (7.17) überein. Die Diskussion zeigt, wie eng in



**Abb. 7.1** Die einfachsten elektroschwachen Strahlungskorrekturen. (a) Fermionen-Schleife im Photon-Propagator, (b)  $t, b$ -Quark-Schleife im  $W$ -Boson-Propagator, (c)  $t$ - und  $b$ -Quark-Schleife im Propagator des  $Z^0$ -Bosons

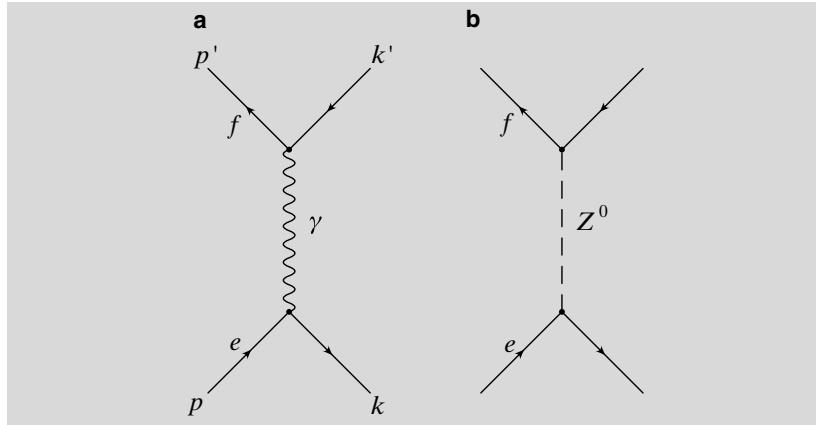


**Abb. 7.2** Die Modifikation des  $Z^0$ -Propagators durch Higgs-Strahlung

diesem Bereich der Teilchenphysik präzise Messungen und komplexe theoretische Rechnungen [Hol90] miteinander verwoben sind.

## 7.2 Die $e^- e^+$ -Vernichtung in Fermion-Antifermion-Paare

Dieser Prozess kann ohne Zweifel als die zentrale Reaktion der elektroschwachen Wechselwirkung angesehen werden. Zu ihrer Erforschung wurde eigens ein großer Elektron-Positron-Speicherring (LEP am CERN in Genf) gebaut, an dem über 1200 Physiker an vier Experimenten arbeiteten.



**Abb. 7.3** Feynman-Graphen der Elektron-Positron-Vernichtung in Fermion-Antifermion-Paare. (a) Photon-Austausch und (b) Austausch eines  $Z^0$ -Bosons

### 7.2.1 Die Bornsche Näherung

Wir berechnen den Wirkungsquerschnitt zunächst in der Bornschen Näherung. Die benötigten Feynman-Graphen sind besonders einfach. Solange auslaufende Elektron-Positron-Paare ausgeschlossen sind, müssen nur Austauschteilchen im  $s$ -Kanal berücksichtigt werden. Zusätzlich zum Photonaustausch der Abb. 3.5 kommt jetzt noch  $Z^0$ -Austausch (Abb. 7.3) hinzu. Wir beginnen mit der Streuamplitude für die Reaktion

$$e_L^- + e_R^+ \rightarrow f_L + \bar{f}_R , \quad (7.23)$$

worin das Symbol  $f$  ein Lepton oder ein Quark bedeuten kann.<sup>1</sup> Aus den Feynman-Regeln berechnet man in der Hochenergiénäherung sofort

$$T_{fi} = -\bar{v}_R(k)\gamma^\mu u_L(p) \left( \frac{-e^2 Q_f}{q^2} + \frac{g^2}{\cos^2 \Theta_W} \frac{c_{L,e} c_{L,f}}{q^2 - M_Z^2} \right) \cdot \bar{u}_L(p')\gamma_\mu v_R(k') , \quad (7.24)$$

wobei die Symbole der Vierervektoren in Abb. 7.3 erläutert sind. Die Koppellungen  $c_{L,e}$  und  $c_{L,f}$  an die Elektronen bzw. an beliebige Fermionen sind in (6.154) definiert. Wir vereinfachen die Schreibweise wie im letzten Abschnitt, indem wir für die Elektronen  $c_{L,e} = c_L$  und  $c_{R,e} = c_R$  ansetzen.

Der Propagator für das  $Z^0$ -Boson muss noch modifiziert werden, um den Pol der Streuamplitude bei  $s = M_Z^2$  zu vermeiden. Für ein instabiles Teilchen

<sup>1</sup> Wie immer bezeichnen die Indizes L, R an den Teilchen und Spinoren die Helizitäten.

der Masse  $M_Z$  und der totalen Zerfallsbreite  $\Gamma_Z$  ist nach den Regeln der Quantenfeldtheorie der Faktor  $1/(q^2 - M_Z^2)$  im Propagator durch

$$\frac{1}{q^2 - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z} \quad (7.25)$$

zu ersetzen. Für die Elektron-Positron-Vernichtung gilt

$$q^2 = s \ , \quad (7.26)$$

und für  $s \approx M_Z^2$  wird der Wirkungsquerschnitt praktisch vollkommen durch den  $Z^0$ -Austausch bestimmt. Insbesondere hat das Betragsquadrat des Propagators die Form der relativistischen Breit-Wigner-Funktion (2.277)

$$f_{\text{BW}}^r = \frac{1}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \ . \quad (7.27)$$

Wir bleiben weiter in der Hochenergiäherung und können daher der Tabelle 3.1

$$-\bar{v}_R(k)\gamma^\mu u_L(p)\bar{u}_L(p')\gamma_\mu v_R(k') = s(1 + \cos\Theta) \quad (7.28)$$

entnehmen. Unter Berücksichtigung von (7.15) gilt dann

$$T_{fi}(e_L^- e_R^+ \rightarrow f_L \bar{f}_R) = -4\pi\alpha(1 + \cos\Theta)(Q_f - A_0 c_L c_{L,f}) \ , \quad (7.29)$$

worin die Abkürzung

$$A_0 = \frac{sM_Z^2}{M_F^2(s - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z)} \quad (7.30)$$

benutzt wurde. Die Zusammenfassung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung in diesem Prozess ist klar zu sehen. Bei niedrigen Energien  $s/M_F^2 \ll 1$  überwiegt die elektromagnetische Wechselwirkung, für  $s \approx M_Z^2$  die schwache Wechselwirkung, während oberhalb des  $Z^0$ -Pols,  $s \gg M_Z^2$ , beide Amplituden die gleiche Größenordnung haben, der Ausdruck „schwache Wechselwirkung“ ist dann bedeutungslos geworden.

Aus der Amplitude  $T_{fi}$  lässt sich nun ohne weiteres der Wirkungsquerschnitt

**Tabelle 7.1** Die Amplituden der Elektron-Positron-Vernichtung in Fermion-Antifermion-Paare in der elektroschwachen Wechselwirkung

Prozess	$T_{fi}/4\pi\alpha$
$e_L^- e_R^+ \rightarrow f_L \bar{f}_R$	$(1 + \cos \Theta)(-Q_f + A_0 c_L c_{L,f})$
$e_L^- e_R^+ \rightarrow f_R \bar{f}_L$	$(1 - \cos \Theta)(-Q_f + A_0 c_L c_{R,f})$
$e_R^- e_L^+ \rightarrow f_L \bar{f}_R$	$(1 - \cos \Theta)(-Q_f + A_0 c_R c_{L,f})$
$e_R^- e_L^+ \rightarrow f_R \bar{f}_L$	$(1 + \cos \Theta)(-Q_f + A_0 c_R c_{R,f})$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^- e_R^+ \rightarrow f_L \bar{f}_R) = & \frac{\alpha^2 N_C}{4s} (1 + \cos \Theta)^2 \\ & \cdot \left( Q_f^2 - 2 \frac{M_Z^2}{M_F^2} s(s - M_Z^2) f_{BW}^r Q_f c_L c_{L,f} \right. \\ & \left. + \frac{M_Z^4}{M_F^4} s^2 f_{BW}^r c_L^2 c_{L,f}^2 \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

berechnen.  $N_C$  ist ein Farbfaktor mit  $N_C = 3$  für Quarks und  $N_C = 1$  für Leptonen im Endzustand. Auf die gleiche Weise kann der Wirkungsquerschnitt für die anderen drei möglichen Helizitätskombinationen aus der Tabelle 7.1 entnommen werden. Mit ihrer Hilfe kann man nun nicht nur den spingemittelten Querschnitt, sondern auch andere interessante Messgrößen, wie z. B. die Asymmetrie zwischen Vorwärts- und Rückwärtsstreuung oder die Polarisierung der auslaufenden Fermionen, bestimmen.

Wir beginnen mit der Berechnung des spingemittelten Wirkungsquerschnitts. Dazu werden zunächst die Betragsquadrate der Amplituden der Tabelle 7.1 addiert. Das über die Spins der einlaufenden Teilchen gemittelte Resultat (der vielleicht etwas mühsamen) Rechnung lautet:

$$\sum |T_{fi}|^2 = 32\pi^2 \alpha^2 \left[ \left( \frac{u^2}{s^2} + \frac{t^2}{s^2} \right) G_1 + \left( \frac{u^2}{s^2} - \frac{t^2}{s^2} \right) G_2 \right] , \quad (7.32)$$

worin die Funktionen  $G_1$  und  $G_2$  durch

$$G_1 = Q_f^2 - 2Q_f v v_f B s(s - M_Z^2) f_{BW}^r + (v^2 + a^2)(v_f^2 + a_f^2) B^2 s^2 f_{BW}^r \quad (7.33)$$

und

$$G_2 = -2Q_f a a_f B s(s - M_Z^2) f_{BW}^r + 4v a v_f a_f B^2 s^2 f_{BW}^r \quad (7.34)$$

definiert sind. Hierin wurde die Abkürzung

$$B = \frac{M_Z^2}{4M_F^2} \quad (7.35)$$

mit  $M_F$  aus (7.15) benutzt. Außerdem wurden die links- und rechtshändigen Kopplungen durch die in der Literatur häufiger vorkommenden Vektor- und Axialvektor-Kopplungen (6.155) ersetzt. Zusätzlich wurden die Abkürzungen  $c_{V,e} = v$ ,  $c_{A,e} = a$  und  $c_{V,f} = v_f$ ,  $c_{A,f} = a_f$  eingeführt. Schließlich wurden die Winkelfunktionen durch die Invarianten  $s, t, u$  ausgedrückt, was sich bei der Behandlung der Elektron-Proton-Streuung als sehr nützlich erweisen wird. Als Standardformel für den Wirkungsquerschnitt leiten wir nun aus (7.32) die Beziehung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^- e^+ \rightarrow f\bar{f}) = \frac{\alpha^2 N_C}{4s} [(1 + \cos^2 \Theta)G_1 + 2 \cos \Theta G_2] \quad (7.36)$$

ab.

Der im Cosinus des Streuwinkels lineare Term enthält die paritätsverletzenden Anteile. Da  $\sin^2 \Theta_W$  nahe bei 0,25 liegt, ist dieser Term für Endzustände mit  $\mu$ - oder  $\tau$ -Paaren ziemlich klein. Zum totalen Querschnitt trägt er auf keinen Fall bei:

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha^2 N_C}{3s} G_1 \quad . \quad (7.37)$$

Das Verhältnis

$$R = \frac{\sigma(e^- e^+ \rightarrow f\bar{f})}{\sigma_{\text{QED}}(e^- e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+)} \quad (7.38)$$

wird durch den starken  $Z^0$ -Pol dominiert. Der Einfluss des  $Z^0$  lässt sich aber auch außerhalb der Resonanz durch die Interferenz des  $Z^0$ -Austausches mit dem Photonaustausch nachweisen. In der Umgebung des  $Z^0$ -Pols gilt in sehr guter Näherung

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha^2 N_C}{3} B^2 s f_{\text{BW}}^r (v^2 + a^2)(v_f^2 + a_f^2) \quad . \quad (7.39)$$

Dieses Ergebnis vergleichen wir mit der allgemeinen Form einer Resonanzkurve in der Elektron-Positron-Vernichtung (2.278)

$$\sigma = 12\pi s \frac{\Gamma_Z^{f\bar{f}} \Gamma_Z^{e\bar{e}}}{M_Z^2} f_{\text{BW}}^r \quad (7.40)$$

und leiten daraus den Ausdruck

$$\Gamma_Z^{f\bar{f}} = \frac{N_C G_F M_Z^3}{6\sqrt{2}\pi} (v_f^2 + a_f^2) \quad (7.41)$$

für die Zerfallsbreite des  $Z^0$  in Fermion-Antifermion-Paare ab. Die benötigten Kopplungen sind in Tabelle 7.2 für die erste Generation von Teilchen (d. h. die jeweils erste Familie von Leptonen und von Quarks) angegeben, für jede weitere Generation gelten natürlich die entsprechenden Formeln. In der Tabelle wurde die Abkürzung

$$x_W = \sin^2 \Theta_W \quad (7.42)$$

benutzt. Numerisch ergibt sich mit dem Wert von  $x_W = 0,23$

$$\Gamma_Z^{\nu\bar{\nu}} = 0,166 \text{ GeV} , \quad (7.43)$$

bzw.

$$\Gamma_Z^{e\bar{e}} = 0,083 \text{ GeV} . \quad (7.44)$$

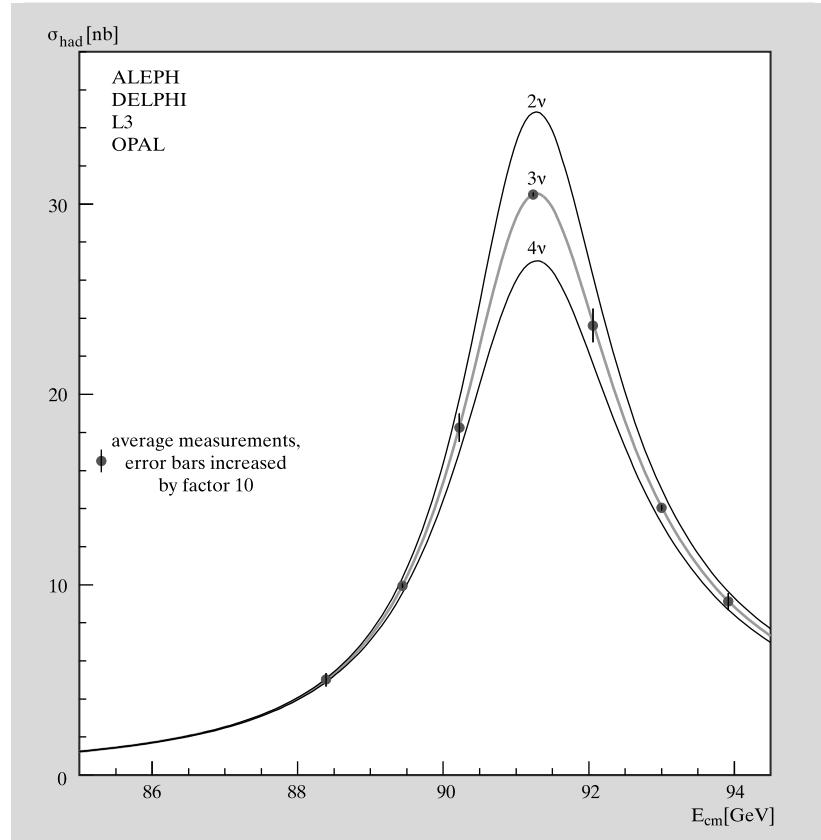
Das  $Z^0$ -Boson ist leichter als das *top*-Quark und kann daher nicht in  $\bar{t}t$  zerfallen. In unserer Näherung erhalten wir deshalb bei Berücksichtigung der drei Leptonfamilien und der *u*-, *d*-, *s*-, *c*-, *b*-Quarks

$$\Gamma_Z = 2,43 \text{ GeV} \quad (7.45)$$

für die totale Zerfallsbreite. Wie wir gerade gelernt haben, trägt jede Neutrinoart 166 MeV hierzu bei. Unter der plausiblen Annahme, dass auch die Neutrinos weiterer Generationen eine geringe Masse haben, lässt eine Messung der  $Z^0$ -Lebensdauer also die Bestimmung der Zahl elementarer Fermion-Generationen zu. In der Praxis geschieht dies durch Ausmessen der Anregungskurve der Resonanz (Abb. 7.4), wobei es sich als vorteilhaft erweist, dass nicht nur die Halbwertsbreite, sondern auch die Höhe der Kurve durch  $\Gamma_Z$  bestimmt wird. Die Messungen am CERN und am SLAC haben die Übereinstimmung mit dem Standardmodell eindrucksvoll nachgewiesen und somit die Generationenzahl auf drei festgelegt. Dies wird sehr anschaulich durch die in Abb. 7.4 eingezeichneten Vorhersagen für zwei, drei und vier Generationen von Neutrinos belegt. Der aus den Messungen bestimmte Wert von

**Tabelle 7.2** Die Kopplungen des  $Z^0$  an Fermion-Antifermion-Paare

	$v_f^2 + a_f^2$
	$1/2$
$\nu\bar{\nu}$	
$e^- e^+$	$1/2 - 2 x_W + 4 x_W^2$
$u\bar{u}$	$1/2 - (4/3) x_W + (16/9) x_W^2$
$d\bar{d}$	$1/2 - (2/3) x_W + (4/9) x_W^2$

**Abb. 7.4** Die  $Z^0$ -Resonanz in der Elektron-Positron-Paarvernichtung in Hadronen. Die eingezeichneten Kurven entsprechen der Vorhersage des Standardmodells für zwei, drei und vier Generationen von Fermionen

$\Gamma_Z = 2,4952 \pm 0,0023$  GeV stimmt ausgezeichnet mit dem durch elektroschwache Strahlungskorrekturen verbesserten Ergebnis des Standardmodells überein.

Die in der Abb. 7.4 zu sehende Gestalt der Kurve bedarf noch eines Kommentars. Die eigentlich symmetrische Form der relativistischen Breit-Wigner-Kurve wird durch die Bremsstrahlung der einlaufenden Elektronen und Positronen aufgehoben. Durch diese wird nämlich die effektive Schwerpunktsenergie reduziert. Zu den Messungen bei  $\sqrt{s} > M_Z$  tragen daher auch viele Ereignisse bei, die erst nach Abstrahlung von Photonen auf dem Pol der Resonanz liegen und daher einen besonders hohen Wirkungsquerschnitt haben. Dies führt zu der beobachteten asymmetrischen Kurvenform. Die theoretische Berechnung lehnt sich an das in Abschn. 3.3.2 vorgestellte Verfahren an.

Die Kopplungen  $v_f$  und  $a_f$  sind durch Auswahl der Endzustände einer experimentellen Bestimmung zugänglich. Natürlich empfiehlt es sich, diese Konstanten über die durch (7.36) festgelegte Winkelverteilung der Fermionen zu messen, da man auf diese Weise die vielen Schwierigkeiten einer absoluten Messung des Wirkungsquerschnitts umgeht. Besonders einsichtig lässt sich das Ergebnis durch die sog. Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

$$A_{FB} = \frac{V - R}{V + R} \quad (7.46)$$

ausdrücken. Hierin ist  $V$  das Integral der Winkelverteilung zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  und  $R$  das entsprechende Integral zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$ . Im Bereich der  $Z^0$ -Resonanz ( $Z^0$ -Pol) folgt aus (7.33) und (7.34) das Ergebnis

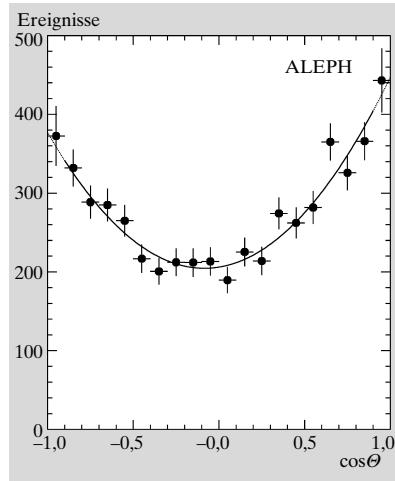
$$A_{FB} = 3 \frac{va}{v^2 + a^2} \frac{v_f a_f}{v_f^2 + a_f^2} , \quad (7.47)$$

das nur noch von den Kopplungen abhängt. Mit der Definition (7.46) lässt sich die Winkelverteilung durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^- e^+ \rightarrow f\bar{f}) \sim 1 + \cos^2 \Theta + \frac{8}{3} A_{FB} \cos \Theta \quad (7.48)$$

ausdrücken. Mit Hilfe einer Anpassungsrechnung an die Winkelverteilung kann man also die Asymmetrie bzw. die schwachen Kopplungen der Fermionen bestimmen. Historisch besonders bedeutsam war die Messung des schwachen Isospins des  $b$ -Quarks. Die Untersuchung der Winkelverteilung von  $b\bar{b}$ -Paaren (Abb. 7.5) am Speicherring LEP im CERN ergab  $I_{3,L}(b) = -1/2$ , das  $b$ -Quark musste also einen Partner mit  $I_{3,L} = +1/2$ , das *top*-Quark haben.

Die experimentelle Aufgabe besteht bei solchen Experimenten v. a. darin,  $b\bar{b}$ -Endzustände zu erkennen. Dazu werden z. B. die in Abschn. 1.5.1 behandelten Vertex-Detektoren eingesetzt, mit deren Hilfe sich zerfallende  $B$ -Mesonen identifizieren lassen. Eine alternative Möglichkeit besteht darin, nur solche hadronische Ereignisse auszuwählen, die ein  $\mu^- \mu^+$ -Paar enthalten. Sie entstehen durch semileptonischen Zerfall des Quarks *und* des Antiquarks bzw.



**Abb. 7.5** Die Winkelverteilung von sog.  $b\bar{b}$ -Zerfällen der  $Z^0$ -Resonanz. Als Signatur wurden Ereignisse mit zwei Leptonen mit hohem Transversalimpuls im Endzustand gewählt. Die beobachtete Asymmetrie muss u. a. noch aufgrund der Effekte von *flavor*-Oszillationen korrigiert werden

ihrer zugehörigen Mesonen. Nur die Lebensdauer von Mesonen mit  $C \neq 0$  oder  $B \neq 0$  ist so klein, dass die Mesonen innerhalb des Detektorvolumens zerfallen. Das Myonspektrum aus  $b$ -Zerfällen ist aber deutlich härter als aus  $c$ -Zerfällen, weil die semileptonischen Zerfälle der schweren Quarks kinematisch dem  $\beta$ -Zerfall des Myons entsprechen (Abschn. 6.1.2). Damit bekommt man ein Kriterium zur Auswahl von  $b\bar{b}$ -Ereignissen an die Hand, obwohl natürlich die Details wie immer komplizierter sind, als es diese Argumentation erscheinen lassen mag.

### 7.2.2 Strahlungskorrekturen

Die Modifikation des Wirkungsquerschnitts durch die Beiträge der Feynman-Graphen höherer Ordnung bezeichnen wir – dem Sprachgebrauch der QED folgend – als Strahlungskorrekturen. Am wichtigsten sind die schon im letzten Abschnitt eingeführten Schleifen-Diagramme der Abb. 7.1. Durch die Rechnungen höherer Ordnung wird die Formel (7.36) für den Wirkungsquerschnitt an verschiedenen Stellen geändert, wobei die genaue Form dieser Änderungen vom verwendeten Rechenschema (Renormierungsschema) abhängt. Für die Einzelheiten muss ich den Leser auf die Literatur verweisen [PDG12, Duc99].

Am einfachsten lässt sich das Ergebnis der Rechnungen höherer Ordnung für die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie auf der  $Z^0$ -Resonanz diskutieren,

denn in (7.47) werden nur die Kopplungen durch die sog. effektiven Kopplungen ersetzt, die ihrerseits durch den effektiven Weinberg-Winkel bestimmt werden. Die effektiven Werte kennzeichnen wir durch Überstreichung, es gilt also z. B.

$$\bar{v}_f = \sqrt{\varrho_f} (I_{3,L}^f - 2Q_f \sin^2 \overline{\Theta}_W) \quad (7.49)$$

$$\bar{a}_f = \sqrt{\varrho_f} I_{3,L}^f \quad (7.50)$$

mit den entsprechenden Ausdrücken für  $v$  und  $a$ . Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie hängt nicht von den Normierungen  $\sqrt{\varrho}$ ,  $\sqrt{\varrho_f}$  ab, durch ihre Messung kann also der effektive Weinberg-Winkel direkt bestimmt werden. Das Ergebnis für  $\sin^2 \overline{\Theta}_W$  aus einer Messung der Asymmetrie kann in erster Näherung mit der Beziehung

$$\sin^2 \overline{\Theta}_W = \sin^2 \Theta_W \left( 1 + \frac{\Delta \varrho_t}{\tan^2 \Theta_W} \right) \quad (7.51)$$

(mit  $\Delta \varrho_t$  aus (7.21) in den Weinberg-Winkel des *on shell*-Schemas umgerechnet werden. Der effektive Weinberg-Winkel ist also etwa 3% größer als der Winkel des *on shell*-Schemas.

Unsere gesamte bisherige Diskussion ging von der stillschweigenden Voraussetzung aus, dass die Korrekturen höherer Ordnung zu endlichen Ausdrücken ohne Benutzung neuer Parameter führen, d. h. dass die elektroschwache Theorie also wie die QED renormierbar ist. In der Tat war der Beweis der Renormierbarkeit des GSW-Modells einer der wesentlichen Schritte auf dem Weg zu einer vereinheitlichten Theorie der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung.<sup>2</sup> Ohne diese Renormierbarkeit hätte der Ansatz von Glashow, Salam und Weinberg nur die Rolle einer Art effektiven Beschreibung der Experimente übernehmen können, ähnlich der Fermi-Theorie des  $\beta$ -Zerfalls. Die Tatsache, dass die Präzisionsmessungen der Elektron-Positron-Vernichtung im Bereich der  $Z^0$ -Resonanz am CERN und im SLAC alle Abweichungen von der Bornschen Näherung als Folge der Strahlungskorrekturen bewiesen haben, ist daher von fundamentaler Bedeutung.

Der dominante Parameter in der Korrektur (7.21) ist die Masse des *top*-Quarks. Ihr Wert wurde aus den Präzisionsmessungen der elektroschwachen Observablen zu etwa 170 GeV vorhergesagt und es ist beeindruckend, wie gut nach der Entdeckung des *top*-Quarks die direkte Messung ( $m_t = 173,5 \pm 1,0$  GeV) und die indirekte Bestimmung aus den elektroschwachen Korrekturen (mit einem identischen Resultat) übereinstimmen. Was hierbei experimentell erreicht wurde, wird klar, wenn man z. B. den relativen Fehler von 0,2% für

---

<sup>2</sup> Die beiden niederländischen Theoretiker Gerardus t’Hooft (geb. 1946) und Martinus J.G. Veltman (geb. 1931) erhielten für diese Leistung den Physik-Nobelpreis 1999.

$\sin^2 \Theta_W$  oder  $2 \cdot 10^{-5}$  für die  $Z^0$ -Masse betrachtet. Um diesen Massenwert mit einer solchen Genauigkeit zu bestimmen, muss vor allem die Strahlenergie des Speicherrings LEP am CERN präzise bekannt sein. Da sie direkt vom Umfang des Rings abhängt, mussten fremdartig anmutende Korrekturen wie z. B. der Einfluss des Füllstandes des Genfer Sees oder Gezeiteneffekte aufgrund der Position des Mondes berücksichtigt werden.

### Übungen

- 7.1 Berechnen Sie das Verhältnis  $R$  der Beziehung (7.38) für die  $\bar{u}u$ -Erzeugung bei Schwerpunktsenergien zwischen 30 und 150 GeV.
- 7.2 Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt der  $e^- e^+$ -Annihilation in Hadronen im Bereich der  $Z^0$ -Resonanz und vergleichen Sie das Ergebnis mit der durchgezogenen Linie der Abb. 7.4. Die Unterschiede zeigen den großen Einfluss der Strahlungskorrekturen.
- 7.3 Berechnen Sie die Polarisation der in der Elektron-Positron-Annihilation erzeugten  $\tau$ -Leptonen bei Schwerpunktsenergien im Bereich der  $Z^0$ -Resonanz.