





# *Kapitel 5*

## ***Elektronen und Quarks***

Christoph Berger

### **Einführung**

Dieses Kapitel behandelt elektromagnetische Reaktionen von Elektronen und Hadronen, also die Prozesse, die durch den Austausch von Photonen beschrieben werden können. Das ist v. a. die Elektron-Positron-Paarvernichtung in Hadronen bei Schwerpunktsenergien weit unterhalb der Masse des  $Z^0$ -Bosons. Genauso wichtig ist die (inelastische) Elektron-Proton-Streuung bei Werten von  $\sqrt{|q^2|}$ , die klein gegenüber der Masse der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen sind. Im Quarkmodell werden diese Reaktionen als elektromagnetische Streuprozesse zwischen Elektronen und Quarks interpretiert. Sobald Quarks im Spiel sind, kann die elektromagnetische Wechselwirkung nicht mehr ohne Beachtung der Quantenchromodynamik behandelt werden. Die QCD kommt auf zwei Weisen ins Spiel: erstens über störungstheoretisch erfassbare Korrekturen der elektromagnetischen Querschnitte, zweitens über die Beschreibung der Hadronisierung der Quarks und Gluonen; letztere ist störungstheoretisch nicht berechenbar.

### **5.1 Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen**

#### **5.1.1 Der Wirkungsquerschnitt**

Falls freie Quarks beobachtet werden könnten, wäre die Reaktion

---

C. Berger, Prof. Dr.

I. Physikalisches Institut, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland. E-mail: [berger@rwth-aachen.de](mailto:berger@rwth-aachen.de)

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \quad (5.1)$$

nur eine fast triviale Variante der in Abschn. 3.2.1 behandelten Myon-Paarerzeugung in Elektron-Positron-Stößen mit einem totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \sum_f Q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{s} \quad (5.2)$$

bei Vernachlässigung der Quarkmassen. Die Summe läuft hier über alle Quarksarten  $f$ , die bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 2E$  erzeugt werden können. Die Summation über die drei Farbfreiheitsgrade ergibt einen Faktor drei, der in (5.2) schon enthalten ist.

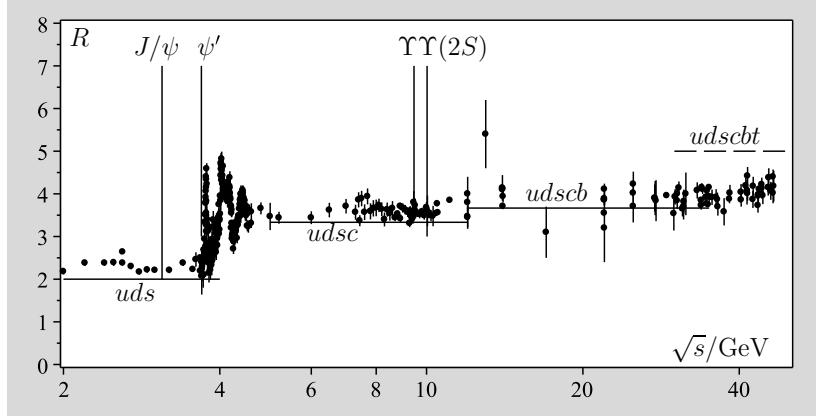
Die Reaktion (5.1) kann nicht direkt beobachtet werden, da es keine freien Quarks gibt. Die Erzeugung von Hadronen in Elektron-Positron-Stößen, also die Reaktion  $e^- e^+ \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein beliebiger hadronischer Endzustand ist, kann jedoch im Quarkmodell als ein Zwei-Stufen-Prozess interpretiert werden. In der ersten Stufe werden Quark-Antiquark-Paare erzeugt, die anschließend hadronisieren. Man könnte nun zunächst vermuten, dass die durch den Einschluss der Quarks erzwungene Hadronisierung die Amplitude auf eine solche Weise verändert, dass jede Ähnlichkeit mit dem Wirkungsquerschnitt (5.2) verlorengeht. Das ist aber nicht so, da Paarerzeugung und Hadronisierung bei zwei ganz verschiedenen Abstandsskalen  $d$  stattfinden.

Um dieses Argument in voller Schärfe zu sehen, nehmen wir als Beispiel eine Strahlenergie  $E$  von 5 GeV an. Das bei der Annihilation von Elektron und Positron entstehende Photon hat den Spin 1. Wenn er durch den relativen Bahndrehimpuls von Quark und Antiquark aufgebaut werden soll, gilt  $E d \approx 1$ , so dass die Paarerzeugung bei einem Abstand von  $d \approx 1/25$  fm passiert.<sup>1</sup> Bei einem solchen Abstand sind die Quarks praktisch frei und können gemäß der Kinematik freier Teilchen auseinander laufen. Das Einschluss-Potential der QCD verhindert die Separation der Quarks auf Abstände, die wesentlich größer als 1 fm sind. Im Prinzip müsste jetzt der Querschnitt (5.2) mit der Wahrscheinlichkeit  $W_f$  multipliziert werden, einen bestimmten hadronischen Endzustand zu erreichen. Wenn man aber nicht einen speziellen hadronischen Endzustand betrachtet, sondern über alle möglichen Konfigurationen summiert, gilt natürlich  $\sum W_f = 1$ , so dass (5.2) die theoretische Vorhersage des Quarkmodells für die Hadronerzeugung in der Elektron-Positron-Vernichtung ist. Mit diesem Trick werden die Probleme der Hadronisierung sehr elegant ausgeschaltet.

Die Skala der Hadronerzeugung ist also durch den Wirkungsquerschnitt (3.151) zur Erzeugung von  $\mu^- \mu^+$ -Paaren definiert. Man gibt daher i. allg. als Vorhersage des Quarkmodells das Verhältnis

---

<sup>1</sup> Diese halbklassische Abschätzung wurde schon in den Übungen zu Abschn. 1.1 benutzt. Sie vernachlässigt den Spin der Quarks.



**Abb. 5.1** Die inklusive Hadronerzeugung in der  $e^- e^+$ -Annihilation. Die Messwerte stammen von vielen verschiedenen Experimenten mit Normierungsfehlern, die bis zu 20 % betragen können. Die waagerechten Linien sind die Vorhersagen gemäß (5.3)

$$R = \frac{\sigma(e^- e^+ \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma_{\text{QED}}(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+)} = 3 \sum_f Q_f^2 \quad (5.3)$$

an. Das ist eine sehr bemerkenswerte Voraussage, bedeutet sie doch, dass dieses Verhältnis in Stufen anwächst, z. B.  $\Delta R = 4/3$  beim Überschreiten der *charm*-Schwelle.

Die Abb. 5.1 zeigt die gute Übereinstimmung des Experiments mit der Theorie über einen sehr weiten Bereich der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ . Das Erstaunliche ist, dass schon bei sehr niedrigen Energien oberhalb der Schwelle für die Erzeugung von  $\rho, \omega, \Phi$ -Mesonen die Hadronproduktion durch das Quarkmodell weitgehend richtig wiedergegeben wird. Andererseits darf nicht übersehen werden, dass im Bereich um  $\sqrt{s} = 8$  GeV die Daten einiger Experimente deutlich zu hoch sind. Auch oberhalb von  $\sqrt{s} = 40$  GeV liegen die Messungen über der Vorhersage des Quarkmodells. Hier macht sich jedoch schon der Einfluss des  $Z$ -Bosons bemerkbar.

Die Formel (5.3) beschreibt die Hadronproduktion über den Mechanismus der Erzeugung schneller Quarks mit anschließender Hadronisierung, wobei alle Schwelleneffekte (siehe z. B. (3.178)) vernachlässigt wurden. Beim Überschreiten einer neuen Schwelle ist die Relativbewegung der neuen Quarks zunächst sogar so langsam, dass auch gebundene Zustände, die Vektormesonen, erzeugt werden können. Diese Reaktionen wurden schon in Abschn. 4.6.1 behandelt. In der Abb. 5.1 werden die  $\psi$ - und  $\Upsilon$ -Mesonen nicht aufgelöst, sondern durch senkrechte Striche symbolisiert. Die reiche und intensiv erforschte Resonanzstruktur oberhalb des  $\psi'$  ist aber klar zu sehen. Durch die gleich zu besprechenden QCD-Korrekturen wird die Vorhersage des einfachen Quark-

modells modifiziert. Wenn man zusätzlich die Erzeugung der Vektormesonen in das theoretische Modell aufnimmt, wird eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment im gesamten Energiebereich gefunden.

Das Gebiet außerhalb der Vektormesonen wird häufig als *Kontinuum* bezeichnet. Es gibt demnach zwei Möglichkeiten, eine weitere Sorte Quarks zu finden: Beobachtung eines neuartigen Vektormesons oder eine Stufe von  $R$  im Kontinuum. Die gestrichelte Linie in Abb. 5.1 zeigt z. B. die (historisch wichtige) Erwartung für die Entdeckung des *top*-Quarks in der Elektron-Positron-Annihilation. Eine Schwelle in  $R$  muss allerdings nicht unbedingt von einer neuen Quarksorte herrühren. Auch andere neue Teilchen, die in Hadronen übergehen, erhöhen dieses Verhältnis. Die  $\tau$ -Leptonen z. B. zerfallen zu ca. 65 % in Endzustände mit Hadronen und tragen daher im Prinzip mit  $\Delta R \approx 0,88$  zur Hadronerzeugung in Elektron-Positron-Stößen oberhalb einer Schwerpunktsenergie von etwa 4 GeV bei. Normalerweise wird man jedoch fordern, dass die Gesamtenergie der Hadronen im Detektor in der Nähe der Schwerpunktsenergie liegt. Dadurch wird die Nachweiswahrscheinlichkeit für hadronische Zerfälle der  $\tau$ -Leptonen stark unterdrückt, da ein Teil der Energie durch Neutrinos weggetragen wird. Beim Erstellen der Abb. 5.1 wurden Ereignisse mit Hadronen aus  $\tau$ -Zerfällen in der Bestimmung der Raten nicht berücksichtigt.

### Schlüsselexperiment

Das  $\tau$ -Lepton wurde 1975 mit dem gleichen Detektor entdeckt, mit dem schon die  $\psi$ -Resonanzen in der  $e^- e^+$ -Vernichtung gefunden wurden [Per75]. Das Vorgehen der Experimentatoren kann als Musterbeispiel für viele ähnliche, spätere Experimente auf der Suche nach neuen Teilchen gelten. Die Aufgabe war besonders schwierig, da im Bereich einer Schwerpunktsenergie von 4 GeV auch die Paarerzeugung von  $c$ -Quarks möglich ist. Die Autoren wählten zunächst Ereignisse mit genau zwei entgegengesetzt geladenen Spuren in einem ansonsten leeren Detektor aus. Sie benutzten dann zu ihrer Suche nach neuen Leptonen die Signatur

$$e^- + e^+ \rightarrow e^\pm + \mu^\mp + \text{fehlende Energie} . \quad (5.4)$$

Auf den ersten Blick verletzen solche Ereignisse die Erhaltung der Elektron- und Myonzahl. Der gewählten Signatur liegt jedoch die Hypothese zugrunde, dass die in der Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow \tau^- + \tau^+ \quad (5.5)$$

erzeugten  $\tau$ -Paare Zerfallskanäle wie das Myon haben, also z. B.  $\tau^+ \rightarrow \bar{\nu}_\tau \mu^+ \nu_\mu$  oder  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e$ . Die auslaufenden Neutrinos sind demnach für die fehlende Energie im Detektor und für die scheinbare Verletzung

der  $L_e$ - und  $L_\mu$ -Erhaltung verantwortlich. Es ist klar, dass der in einem solchen Experiment verwendete Detektor eine sehr gute Erkennung von Elektronen, Photonen und Myonen über einen großen Bereich des Raumwinkels erlauben muss. Auf diese Weise kann man dann z. B. beweisen, dass ein Elektron nicht durch eine Myonspur vorgetäuscht wird, die zufällig mit einem durch ein Photon ausgelösten elektromagnetischen Schauer zusammenfällt. Die Autoren führten diesen Beweis, indem sie zeigten, dass der Impuls der Elektronenkandidaten aus der Vermessung der Spur mit der Energie des zugehörigen kalorimetrischen Signals übereinstimmte.

Die Eigenschaften und die Rate der so ausgewählten Ereignisse konnten mit der Hypothese (5.5) erklärt werden, während keine andere Annahme auf die Daten passte. Eine typische Quelle von Untergrund, die studiert werden muss, sind z. B. Zwei-Photonen-Reaktionen  $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+ \mu^- \mu^+$ , bei denen jeweils ein Elektron und ein Myon, den Detektor entlang der Strahlröhre verlassen.

Martin L. Perl, der Leiter dieser Analyse, erhielt 1995 den Nobelpreis für Physik. Zusammen mit ihm wurde Frederick Reines für die Entdeckung des Elektron-Neutrinos geehrt. Die Beschreibung dieses Schlüsselexperiments findet sich in Abschn. 1.2.2.

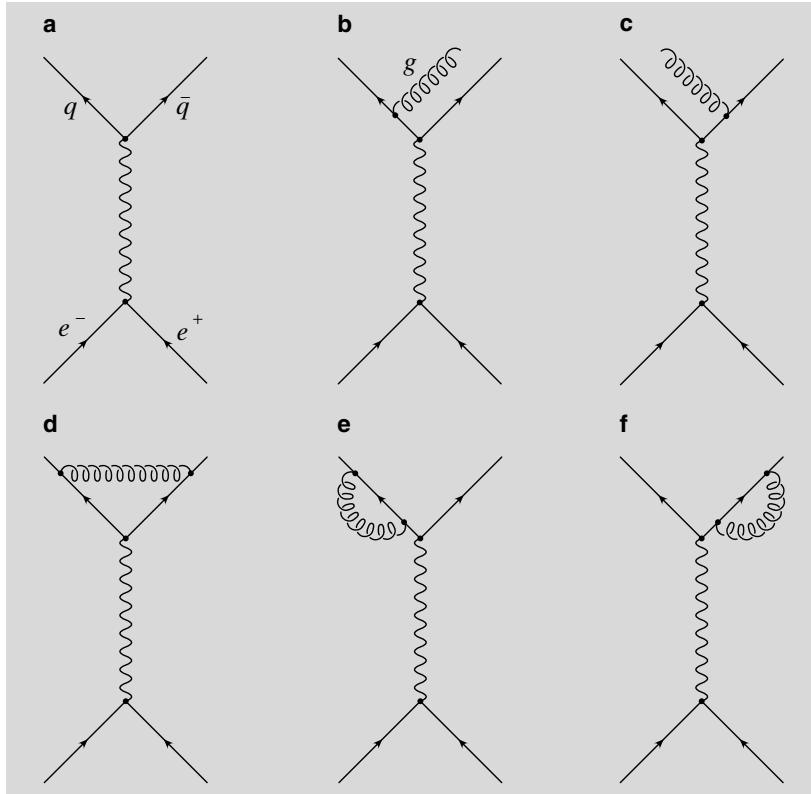
### 5.1.2 QCD-Korrekturen

Sobald Quarks im Spiel sind, macht es keinen Sinn, die elektromagnetische Wechselwirkung von der starken Wechselwirkung getrennt zu behandeln. In niedrigster Ordnung der Störungstheorie z. B. kann die elektromagnetische Paarerzeugung von Quarks (Abb. 5.2a) durch die Abstrahlung eines zusätzlichen Gluons modifiziert werden (Abb. 5.2b,c). Die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für die Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} + g \quad (5.6)$$

soll jetzt besprochen werden. Ein wichtiges Problem, das die Autoren der ersten Rechnung [Ell76] lösen mussten, war die Bestimmung des Phasenraumintegrals für den Drei-Körper-Endzustand dieser Reaktion, das im allgemeinsten Fall noch von fünf Variablen abhängt (Abschn. 2.1.2). Wir werden dies hier nicht nachvollziehen, sondern den teilweise integrierten Wirkungsquerschnitt auf eine einfachere Art finden.

Dazu interpretieren wir die Annihilationsreaktion  $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}g$  als Erzeugung und Zerfall eines virtuellen Photons der Masse  $\sqrt{s}$ . Der Wirkungsquer-



**Abb. 5.2** Feynman-Diagramme der Elektron-Positron-Annihilation bis zur Ordnung  $\alpha_S$  der QCD. (a) Bornsche Näherung, (b), (c) reelle QCD-Korrekturen, (d)–(e) virtuelle QCD-Korrekturen

schnitt lässt sich in der Gestalt der Breit-Wigner-Formel (2.278) anschreiben, wobei im kinematischen Vorfaktor  $M_R^2 = s$  gesetzt wird. Die relativistische Breit-Wigner-Funktion  $f_{BW}^r$  kann als das Betragsquadrat des Propagators eines instabilen Teilchens aufgefasst werden. Wir ersetzen sie daher durch das Betragsquadrat  $1/s^2$  des Photonpropagators und bekommen

$$\sigma = \frac{12\pi\Gamma_{ee}\Gamma_f}{s^2}. \quad (5.7)$$

In diesem Formalismus wird die Annihilation  $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$  durch  $\sigma = 12\pi\Gamma_{ee}^2/s^2$  beschrieben, da Myonen und Elektronen mit der gleichen Stärke an Photonen koppeln. Der Vergleich mit (3.151) liefert dann das Resultat

$$\Gamma_{ee} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{3} . \quad (5.8)$$

Die Behandlung des Drei-Körper-Zerfalls eines Teilchens in Abschn. 2.1.2 lehrt uns, dass die Energien und relativen Winkel der drei Teilchen im Endzustand vollständig durch die Angabe von zwei Energien definiert sind. Es ist praktisch, dimensionslose Variablen zu wählen, z. B.  $x_1 = E_q/E$  und  $x_2 = E_{\bar{q}}/E$ . Um den differentiellen Querschnitt

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} (e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}g) = \frac{4\pi\alpha}{s\sqrt{s}} \frac{d^2\Gamma_f}{dx_1 dx_2} \quad (5.9)$$

zu erhalten, müssen wir die differentielle Zerfallsbreite  $d^2\Gamma_f/dx_1 dx_2$  eines virtuellen Photons in ein Quark-Antiquark-Paar und ein Gluon berechnen. Dieser Zerfall ist mit dem virtuellen Compton-Effekt (siehe Kasten am Ende von Abschn. 3.10) durch eine *crossing*-Relation verwandt, die in Abb. 5.3 erläutert wird. Die Summe der Amplitudenquadrate für den Zerfall des virtuellen Photons kann also sehr schnell aus (3.238) gewonnen werden. Die Mandelstam-Variablen  $s, t, u$  werden zunächst mit einem Dachsymbol versehen, da es sich um die Berechnung eines Subprozesses handelt. Wie bei der Comptonstreuung gilt  $\hat{u} = (k - p')^2$  und  $\hat{t} = (k - k')^2$ . Entsprechend der Vorschrift der Abb. 5.3 wird aber  $\hat{s}$  durch  $\hat{s}_2 = (k - \bar{p})^2$  ersetzt. Außerdem muss beachtet werden, dass die Überkreuzung einer Fermionlinie ein globales Minuszeichen beisteuert. Die Ersetzung der Elektronen und Photonen im Endzustand durch Quarks der Sorte  $f$  und Gluonen lässt sich durch die Substitution  $e^4 \rightarrow e^2 Q_f^2 g^2 c_F$  bewerkstelligen. Zusammengefasst erhalten wir also

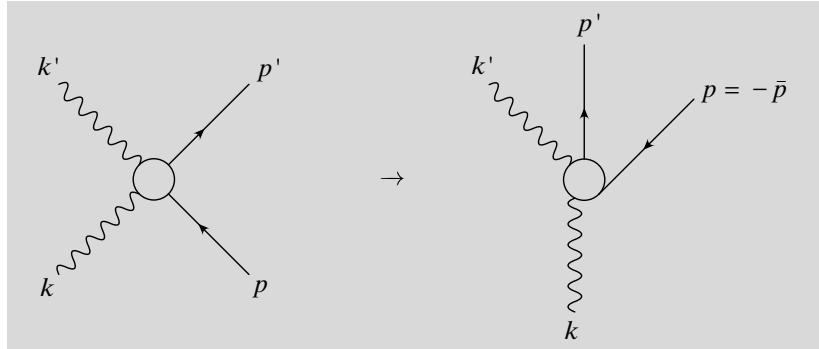
$$\sum |T_{fi}|^2 = 8e^2 Q_f^2 g^2 c_F \left( \frac{\hat{u}}{\hat{s}_2} + \frac{\hat{s}_2}{\hat{u}} + \frac{2k^2 \hat{t}}{\hat{s}_2 \hat{u}} \right) . \quad (5.10)$$

Den Ausdruck in der Klammer werten wir im  $e^- e^+$ -Schwerpunktssystem aus. Dort gilt  $k^\mu = (2E, 0, 0, 0)$  und daher  $\hat{u} = k^2(1-x_1)$  bzw.  $\hat{s}_2 = k^2(1-x_2)$ . Mit  $\hat{t} = k^2 - \hat{u} - \hat{s}_2$  und  $k^2 = 4E^2$  kann der Klammerausdruck als eine Funktion von  $x_1$  und  $x_2$  angegeben werden, welche die übersichtliche Form

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \quad (5.11)$$

nimmt.

Mit den Methoden der Berechnung des Farbfaktors haben wir uns schon in Abschn. 4.2.1 befasst. Ihre Anwendung ergibt im Fall der Abstrahlung eines Gluons von einem Quark einer bestimmten Farbe einen Faktor  $4/3$ ,



**Abb. 5.3** Der Zusammenhang zwischen dem virtuellen Compton-Effekt und dem Zerfall eines virtuellen Photons durch Kreuzen einer Fermionlinie. Die Symbole bezeichnen die Viererimpulse der Teilchen

der Beweis wird als Übungsaufgabe gestellt. Nach Summation über die drei Farben folgt demnach  $c_F = 4$ .

Zur Mittelung über die Spins des zerfallenden virtuellen Photons wird die Summe der quadrierten Amplituden durch drei geteilt. Die Anwendung von (2.50) führt dann zum Resultat

$$\frac{d^2\Gamma_f}{dx_1 dx_2} = \frac{2}{3\pi} \sqrt{s} \alpha \alpha_S Q_f^2 f(x_1, x_2) , \quad (5.12)$$

das in (5.9) eingesetzt werden muss. Wenn wir jetzt über alle Quarksorten summieren und die Abkürzung

$$\sigma_0 = \sum_f Q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{s} \quad (5.13)$$

benutzen, erhalten wir das Endergebnis

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} = \sigma_0 \frac{2\alpha_S}{3\pi} f(x_1, x_2) . \quad (5.14)$$

Diese berühmte Formel [Ell76] beschreibt demnach die Abstrahlung von Gluonen als Produkt des Querschnitts (5.2) der Elektron-Positron-Paarvernichtung in  $q\bar{q}$ -Paare mit einem Faktor, der die Kopplung  $\alpha_S$  und die Verteilungsfunktion der Energien enthält. Die gleiche Struktur haben wir schon bei der Behandlung der Bremsstrahlung (3.279) vorgefunden und es überrascht nicht, dass auch hier die Energie- und Winkelverteilung der Gluonen sehr ähnlich zu den Verteilungen der Photonen bei der Bremsstrahlung sind. Die meis-

ten Gluonen haben eine kleine Energie und einen kleinen Winkel relativ zum Quark, von dem sie abgestrahlt werden. Sie machen sich daher nur in einer Modifikation des totalen Querschnitts (5.2) bemerkbar. Um diese Modifikation in der Ordnung  $\alpha_S$  zu bekommen, müssen wir (5.14) über  $x_1, x_2$  in den Grenzen von 0 bis 1 integrieren und sind wieder mit dem Divergenzproblem konfrontiert.

Die Struktur der Divergenz ist hier noch komplizierter als bei der Bremsstrahlung. Auch hier finden wir die Infrarot-Divergenz, da mit der Definition  $x_3 = E_g/E$  der Energiesatz die Form

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (5.15)$$

annimmt und daher ein verschwindender Wert von  $x_3$  gleichzeitig  $x_1 \rightarrow 1$  und  $x_2 \rightarrow 1$  erzwingt. Zusätzlich haben wir aber noch die separaten kollinearen Divergenzen  $x_1 \rightarrow 1$  bzw.  $x_2 \rightarrow 1$ , die auftreten, wenn das Gluon parallel zum Antiquark oder Quark abgestrahlt wird. In der Bremsstrahlung tauchen diese Divergenzen bei Berücksichtigung der Masse der Elektronen nicht auf.

### Vertiefung

Um zu verstehen, dass ein kollinear mit dem Antiquark abgestrahltes Gluon mit  $x_1 = 1$  gleichbedeutend ist, formen wir  $\hat{u} = (k - p')^2$  mit Hilfe der Viererimpulserhaltung zu  $\hat{u} = (k' + \bar{p})^2$  um. In der hier verwendeten masselosen Kinematik wird daraus  $\hat{u} = 2k' \cdot \bar{p}$ , also

$$\hat{u} = 2E_g E_{\bar{q}} (1 - \cos \theta_{g\bar{q}}) . \quad (5.16)$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar  $\hat{u} \rightarrow 0$  bzw.  $x_1 \rightarrow 1$  für  $\theta_{g\bar{q}} \rightarrow 0$ . Eine ähnliche Rechnung muss für  $\hat{s}_2$  durchgeführt werden.

Auch jetzt lassen sich die Divergenzen durch Hinzunahme der virtuellen Korrekturen der Abb. 5.2 beheben. Genau wie bei der Behandlung der Bremsstrahlung muss man die Werte aus Abb. 5.2b,c quadrieren und die Interferenz von a) mit d) bis f) der Abb. 5.2 berechnen. In einer durchsichtigen Schreibweise lässt sich diese Vorgehensweise in die Form

$$\sigma \sim |A|^2 + |B + C|^2 + 2\text{Re}[A^*(D + E + F)] \quad (5.17)$$

bringen. Das Ergebnis dieser Rechnung lautet

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow \text{Hadronen}) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\alpha_S(s)}{\pi} \right) , \quad (5.18)$$

wobei im Sinne der verbesserten Bornschen Näherung die laufende Kopplungskonstante  $\alpha_S(q^2)$  mit  $q^2 = s$  eingesetzt wurde. Bei  $s = 1000 \text{ GeV}^2$  gilt aber  $\alpha_S \approx 0,16$ , die Korrektur aufgrund der starken Wechselwirkung beträgt daher etwa fünf Prozent. Die Genauigkeit moderner Annihilationsexperimente reicht aus, den Einfluss dieser Korrektur zu sehen. Die inklusive Hadronerzeugung in der Elektron-Positron-Paarvernichtung gilt trotz des numerisch kleinen Effektes als attraktiver Weg zur Bestimmung der Kopplungskonstanten  $\alpha_S$ , da es hier keine theoretischen Unsicherheiten infolge von Hadronisierungskorrekturen gibt. Nicht zuletzt aus diesem Grunde wurden die störungstheoretischen Rechnungen zu höheren Ordnungen hin erweitert. Heute ist die Reihe bis zur Ordnung  $\alpha_S^3$  bekannt. Bei Berücksichtigung von fünf Quarksorten lautet das Ergebnis

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow \text{Hadronen}) = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\alpha_S}{\pi} + 1,409 \left( \frac{\alpha_S}{\pi} \right)^2 - 12,805 \left( \frac{\alpha_S}{\pi} \right)^3 \right), \quad (5.19)$$

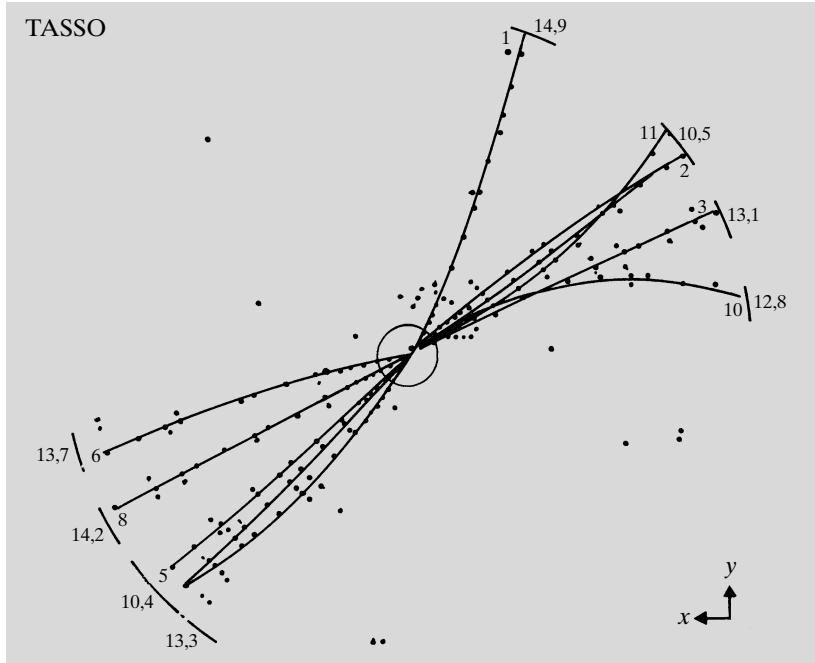
eine wirklich bewundernswerte Leistung [Sur91] der theoretischen Physiker, wenn man die große Zahl der beitragenden Diagramme bedenkt.

### 5.1.3 Der Endzustand

Den Übergang von Quarks (und Gluonen) zu Hadronen im Kontinuumsbereich bezeichnen wir häufig als Fragmentierung. Diese Fragmentierung ist störungstheoretisch nicht berechenbar, da sie bei großen Abständen stattfindet. Der Endzustand der Reaktion (5.1) besteht aber trotzdem nicht in einer statistischen Gleichverteilung von Hadronen über den Raumwinkel, sondern zeigt ganz handgreiflich die  $q\bar{q}$ -Natur der Ereignisse. Die Hadronen sind nämlich in sog. *Jets* gebündelt, deren Gesamtenergie durch die Energie  $E_q$  des Quarks, aus dem sie hervorgehen, festgelegt wird. Jets zeichnen sich dadurch aus, dass in ihnen alle Hadronen bezüglich der Jetachse einen relativ kleinen Transversalimpuls von  $p_T \approx 300 \text{ MeV}$  haben. Die Longitudinalimpulse  $p_L$  skalieren bis auf logarithmische Korrekturen mit der Energie  $E_q$  der Jets, werden also durch eine Verteilungsfunktion  $D^h(z)$  beschrieben, die nur von der dimensionslosen Variablen

$$z = \frac{p_L}{E_q} \quad (5.20)$$

abhängt. Die logarithmischen Korrekturen am Skalenverhalten der Longitudinalimpulse sind so zu verstehen, dass ein kleiner Teil der zur Verfügung stehenden Energie zur Produktion neuer Teilchen verbraucht wird, die Teil-



**Abb. 5.4** Ein Zwei-Jet-Ereignis der  $e^- e^+$ -Vernichtung im TASSO-Detektor am Speicherring PETRA des DESY. Gezeigt ist die Projektion der Spuren auf eine Ebene, die senkrecht zu den einfallenden Strahlen durch den Wechselwirkungspunkt geht

chenmultiplizität steigt logarithmisch mit der Energie an. Eine unmittelbare Konsequenz des Skalenverhaltens besteht darin, dass die Öffnungswinkel der Jets, die natürlich proportional zu  $p_T/p_L$  sind, bei höheren Energien wie  $1/E$  schrumpfen.

Die Reaktion (5.1) sollte infolge dieser qualitativen Überlegungen zu sog. Zwei-Jet-Ereignissen führen, bei denen  $E_q$  mit der Strahlenergie  $E$  identisch wird und die Jetachse der Richtung der Quarks entspricht. Ein Beispiel eines solchen Zwei-Jet-Ereignisses in der  $e^- e^+$ -Annihilation zeigt Abb. 5.4. Aufgetragen sind die Spuren der Teilchen in einer Ansicht senkrecht zur Achse der einfallenden Elektronen bzw. Positronen.

Experimentell lässt sich die Jetachse für Ereignisse der Reaktion (5.1) mit Hilfe der *thrust*-Variablen  $T$  finden,

$$T = \max \frac{\sum_i |\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n}|}{\sum_i |\mathbf{p}_i|} . \quad (5.21)$$

Summiert wird über alle Hadronen eines Ereignisses. Man sucht hiermit also eine Richtung  $\mathbf{n}$ , bezüglich der die Summe der Longitudinalimpulse der Hadronen maximal wird. Wenn die Gleichsetzung der Jets mit den Quarks

richtig ist, muss die Winkelverteilung der  $T$ -Achse in der Annihilation dem Gesetz (3.150) folgen. Dies wurde in der Tat gefunden und bedeutete eine wesentliche Unterstützung für die Beschreibung der Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen durch das Quarkmodell.

Die *thrust*-Variable  $T$  ist auch sehr gut zur Charakterisierung der Ereignistopologie geeignet. Ihr Wert beträgt naturgemäß 1 für Ereignisse mit zwei unendlich gut kollinierten Jets und 0,5, falls die auslaufenden Hadronen eine isotrope Winkelverteilung haben. Es ist nun besonders reizvoll, die Mittelwerte  $\langle T \rangle$  aus vielen vermessenen hadronischen Reaktionen im Detektor mit den theoretischen Vorhersagen auf dem sog. *Parton-Niveau* zu vergleichen, wobei nun die Summation in (5.21) über die Quarks und Gluonen des Endzustandes läuft.<sup>2</sup> Bei der Betrachtung der Partonen gilt  $\langle T \rangle = 1$  im Grenzfall reiner  $q\bar{q}$  Ereignisse, während durch die Abstrahlung von Gluonen  $\langle T \rangle < 1$  wird.

Die Observable  $T$  hängt im Zähler und im Nenner nur linear von den Impulsen der betrachteten Teilchen ab. Sie gehört zu den theoretisch besonders interessanten Variablen, die als „infrarot und kolinear“ stabil gelten, da sich ihr Wert bei Abstrahlung eines weichen oder kolinearen Gluons von einem Quark nicht ändert. Sie ist daher unempfindlich gegen die unvermeidlich auftretenden Divergenzen in den störungstheoretischen Rechnungen.

In führender Ordnung der QCD kann  $\langle T \rangle$  mit Hilfe von (5.14) berechnet werden [Ruj78], das Ergebnis lautet

$$\langle 1 - T \rangle = 0,335\alpha_S . \quad (5.22)$$

Wenn für  $\alpha_S$  jetzt wieder die laufende Kopplungskonstante eingesetzt wird, stellt (5.22) eine relativ einfach zu überprüfende Vorhersage der QCD dar, mit der v. a. das Konzept der asymptotischen Freiheit getestet werden kann:  $\langle 1 - T \rangle$  muss in einer wohldefinierten Weise für hohe Werte von  $s$  gegen Null streben.

Natürlich darf (5.22) nicht direkt mit dem hadronischen Wert verglichen werden. Aufgrund der Fragmentierungseffekte wird auch ein Zwei-Jet-Ereignis  $T < 1$  haben. Auf die numerischen Verfahren zur Berechnung der Hadronisierung gehen wir am Schluss dieses Abschnitts nochmal ein. Da die einzelnen Hadronen in den Jets bevorzugt die Richtung des ursprünglichen Quarks beibehalten und häufig nur kleine Bruchteile des Quarkimpulses übernehmen, erwarten wir, dass  $T$  ebenfalls relativ unempfindlich gegen Details des Fragmentierungsprozesses ist. Aufgrund sehr allgemeiner Überlegungen [Ell10] wurde gezeigt, dass die Korrekturen vom Hadron-Niveau auf das Parton-Niveau umgekehrt proportional zur Schwerpunktsenergie abnehmen, so dass

---

<sup>2</sup> Das Wort Parton wird oft als Sammelbegriff für Quarks und Gluonen verwendet.

$$\langle 1 - T \rangle_{\text{Hadronen}} = 0,335\alpha_S + \frac{\lambda}{\sqrt{s}} \quad (5.23)$$

mit  $\lambda \approx 1 \text{ GeV}$  angesetzt werden kann.

Das Verhalten der *thrust*-Observablen und anderer sog. *event shape*-Variablen wurde ausführlich an den  $e^- e^+$ -Speicherringen untersucht. Von diesen Experimenten stammen grundlegende Tests der asymptotischen Freiheit und präzise Messungen der starken Kopplungskonstanten. Für genaue Analysen reicht (5.22) zum Vergleich mit der Theorie nicht aus, sondern es werden auch zu dieser Formel die Beiträge höherer Ordnung benötigt. Ebenso ist die Behandlung der Fragmentierungskorrekturen in keiner Weise einfach. In Abb. 5.5 ist ein neueres Ergebnis einer zusammenfassenden Studie wiedergegeben, in welcher der Leser die erreichte Präzision und die gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment bewundern kann.

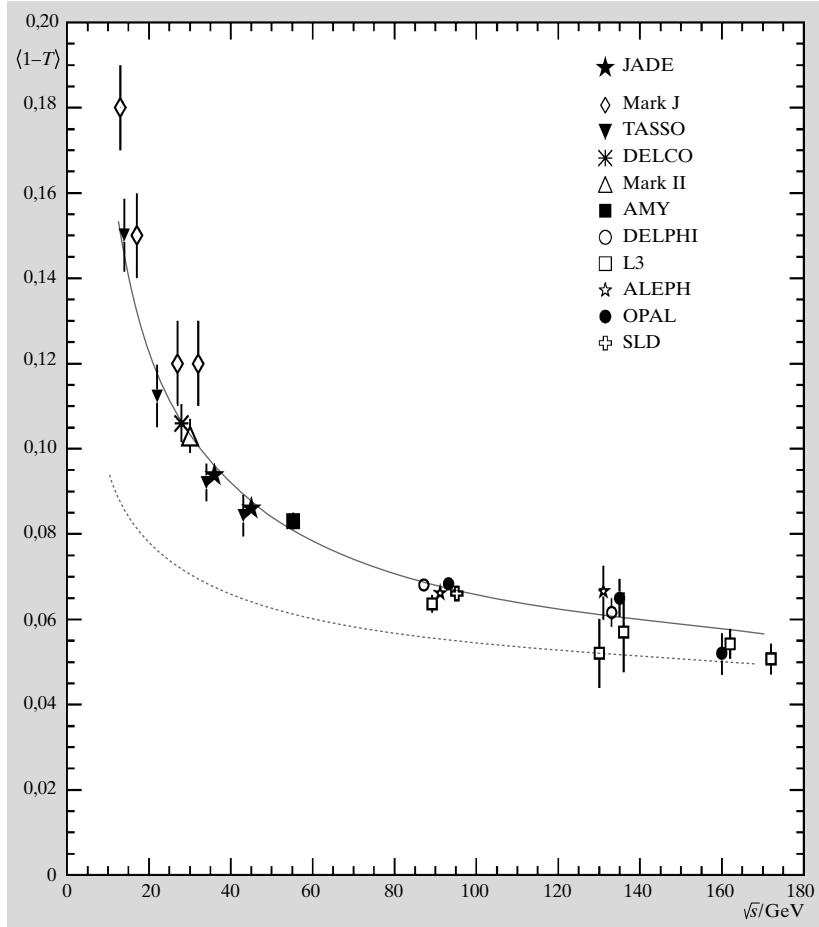
In einem kleinen Bruchteil aller Fälle führt die Abstrahlung von Gluonen zu spektakulären Drei-Jet-Ereignissen (Abb. 5.6). Diese wurden am Elektron-Positron-Speicherring PETRA des DESY entdeckt. Die kinematischen Eigenschaften der Drei-Jet-Ereignisse entsprechen den theoretischen Vorhersagen. Die Energien der beiden energiereichsten Jets werden mit  $E_q$  und  $E_{\bar{q}}$  identifiziert, und ihre Verteilung wird mit (5.14) verglichen. Die hierbei gefundene quantitative Übereinstimmung manifestiert eine Art objektiver Evidenz für Gluonen, die natürlich als farbige Feldquanten ebenfalls dem Einschluss (*confinement*) unterliegen und daher nicht als freie Teilchen im Detektor auftreten.

Da ein Ereignis mit einem zusätzlichen weichen oder kollinearen Gluon sich nicht von einem  $q\bar{q}$ -Ereignis unterscheiden lässt, muss (wie bei der Behandlung der Bremsstrahlung in Abschn. ) ein Auflösungskriterium eingeführt werden. Dieses Argument gilt auch für die Hadronen des Detektors. Die Analyse von Ereignissen mit mehr als zwei Jets macht also die Entwicklung allgemeiner Algorithmen zur Rekonstruktion der Jets aus den Impulsen der Reaktionsprodukte nötig.

Hierzu werden iterative Verfahren verwendet, in denen zunächst ein Maß  $d_{kl}$  für den Abstand zweier Objekte definiert werden muss. Im JADE-Algorithmus, einem Verfahren [Bar86b], welches in der Analyse der Elektron-Positron-Vernichtung weit verbreitet ist, werden zunächst die „Abstände“ aller Paare von Teilchen (oder Partonen) eines Ereignisses nach der Vorschrift

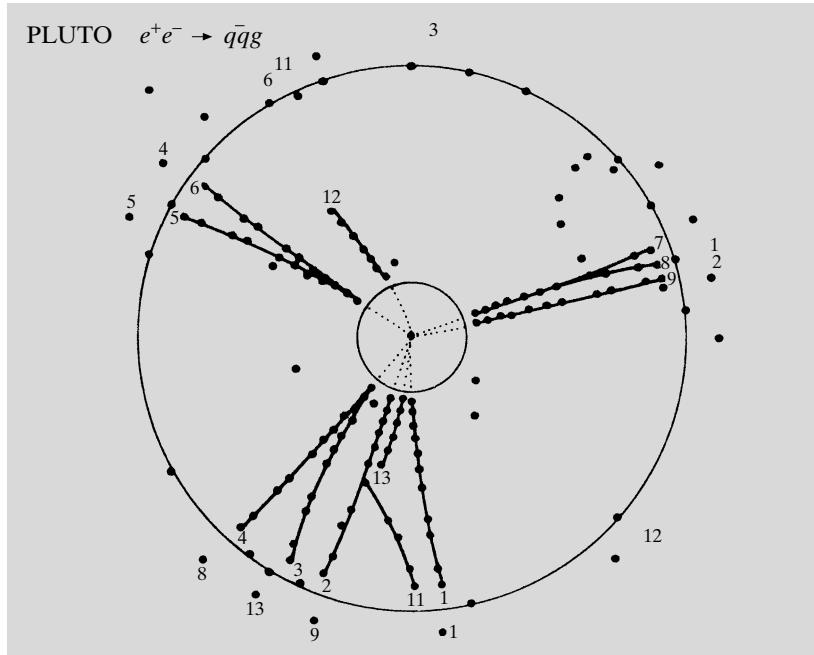
$$d_{kl}^2 = 2E_k E_l (1 - \cos \Theta_{kl}) \quad (5.24)$$

berechnet, in der  $\Theta_{kl}$  den Winkel zwischen den beiden Teilchen mit den Energien  $E_k$  und  $E_l$  kennzeichnet. Anschaulich entspricht  $d_{kl}$  der invarianten Masse zweier masseloser Teilchen. Im nächsten Schritt werden die Teilchen  $i$  und  $j$  mit dem kleinsten  $d_{ij}$  durch ein Pseudoteilchen mit dem Viererimpuls  $(p_i^\mu + p_j^\mu)$  ersetzt, falls  $d_{ij}$  unterhalb eines Schnittwertes  $d_{\text{cut}}$  liegt, der das Auflösungskriterium darstellt. Der Algorithmus wird nun solange wie-



**Abb. 5.5** Der Mittelwert von  $1 - T$  in der  $e^- e^+$ -Vernichtung in Hadronen. Es sind Daten verschiedener Experimente zusammengefasst. Die gestrichelte Kurve gibt eine perturbative QCD-Rechnung höherer Ordnung wieder, die durchgezogene Kurve berücksichtigt zusätzlich die Hadronisierungskorrekturen nach [Ell10]

derholt, bis alle noch verbleibenden Objekte einen Abstand  $\geq d_{\text{cut}}$  haben. Diese Kombinationen von Teilchen und Pseudoteilchen sind die gesuchten Jets. Mit Hilfe solcher Methoden ist die Erzeugung von drei und mehr Jets in der Elektron-Positron-Annihilierung ausführlich untersucht worden. Man kann sich an Beispielen klarmachen, dass der Algorithmus wieder infrarot und kollinear sicher ist. Die Zuordnung zu Jets wird also nicht geändert, wenn z. B. auf der Ebene der Partonen ein Quark durch ein Quark und ein kollineares Gluon ersetzt wird, oder von einem Quark ein Gluon geringer Energie abgestrahlt wird.

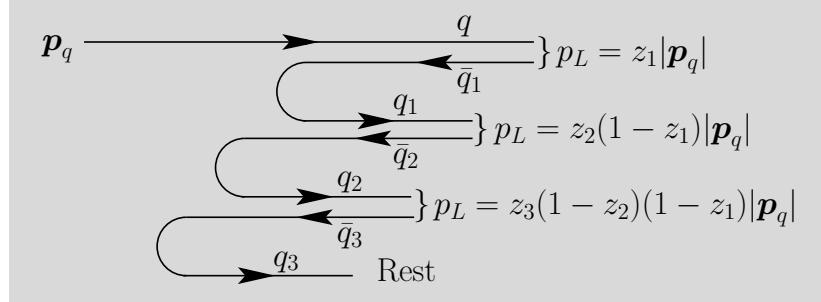


**Abb. 5.6** Ein typisches Drei-Jet-Ereignis im PLUTO-Detektor, wie es kurz nach Beginn der Experimente am Speicherring PETRA gefunden wurde

Der Übergang von den Quarks und Gluonen zu den Hadronen (die sog. Fragmentierung) findet bei Abständen der Partonen von 1–3 fm, also bei einer Zeitskala von  $10^{-23}$  s statt. Bei diesen Abständen kann die Störungstheorie nicht mehr angewendet werden. Ein quantitatives Verständnis dieser Prozesse ist jedoch unabdingbar, da alle Untersuchungen eines bestimmten Endzustandes beim Vergleich mit der Theorie versuchen müssen, von den hadronisch ermittelten Observablen auf die partonischen Observablen zu schließen. Zum Abschluss der Diskussion des hadronischen Endzustandes in der Elektron-Positron-Paarvernichtung soll daher jetzt noch die numerische Behandlung der Fragmentierung mit Hilfe von QCD-Modellen diskutiert werden.

In Abschn. 4.2.1 haben wir den Einschluss der Quarks im Saitenmodell behandelt. Die Fragmentierung entspricht dem Zerreissen des Bündels der Farbfeldlinien zwischen den Quarks. Die in der Gluonfeld-Saite gespeicherte Energie ist im betrachteten Fall so groß, dass sie die Bildung vieler  $q\bar{q}$ -Paare erlaubt. Diesen Vorgang kann man mittels einer „Monte-Carlo“-Rechnung rekonstruieren.<sup>3</sup> Das *string*-Modell der Hadronisierung wurde v. a. an der Universität Lund entwickelt und steht heute in Form des Programm-Pakets

<sup>3</sup> Als „Monte-Carlo“-Methode wird das Nachbilden zufälliger Prozesse auf einem Computer bezeichnet. Der Name erinnert daran, dass die Zahlenfolge im Roulette ebenfalls zufällig ist.



**Abb. 5.7** Hadronisierung der Quarks im Modell der unabhängigen Fragmentierung

JETSET [Sjo82] an allen Forschungszentren zur Verfügung. Für einen  $q\bar{q}$ -Zustand liefert es sehr ähnliche Resultate wie das zuvor von Field und Feynman [Fie78] entwickelte Modell der unabhängigen Fragmentierung (*independent fragmentation*). Letzteres hat für uns den Vorteil, dass seine Grundzüge sich leichter beschreiben lassen.

Wir betrachten die Erzeugung von Mesonen im Prozess  $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$  und nehmen an (siehe Abb. 5.7), dass in dem von den auseinander laufenden Quarks produzierten Farbfeld zunächst ein Paar  $q_1\bar{q}_1$  produziert wird. Das nach rechts laufende ursprüngliche Quark  $q$  mit dem Impuls  $|\mathbf{p}_q|$  formt mit dem Quark  $\bar{q}_1$  ein Meson ( $q\bar{q}_1$ ). Der Longitudinalimpuls dieses Mesons, also die Impulskomponente in Richtung  $\mathbf{p}_q$ , sei  $z_1|\mathbf{p}_q|$ , das übrigbleibende Quark  $q_1$  hat dann den Longitudinalimpuls  $p_{1,L} = (1 - z_1)|\mathbf{p}_q|$ . Nun wird ein Paar  $q_2\bar{q}_2$  erzeugt,  $\bar{q}_2$  bildet mit  $q_1$  ein Meson mit dem Longitudinalimpuls  $z_2 p_{1,L}$ , und so geht es immer weiter, bis der gesamte Impuls aufgebraucht ist. Das übrig bleibende langsame Quark (der Rest) wird dann noch mit einem Antiquark, das aus der Fragmentierung des ursprünglichen  $\bar{q}$  entstanden ist, zu einem Meson vereinigt. Zur Durchführung der Monte-Carlo-Rechnung muss man zunächst eine universale Verteilungsfunktion  $f(z_i)$  festlegen, welche die Aufteilung der Longitudinalimpulse in den oben besprochenen Prozessen festlegt. Die Verteilung der Zufallszahlen  $z_1, z_2, \dots$  wird entsprechend dieser Funktion erzeugt. Es ist klar, dass ein solches Verfahren eine Verteilungsfunktion  $D^h$  der Longitudinalimpulse der Hadronen erzeugt, die nur von der in Formel (5.20) definierten Variablen  $z$  abhängt und damit die weiter oben geforderte Qualität erfüllt. Die Hadronen bilden also *Jets*. Zusätzlich simuliert man im Rechenprogramm auch noch den Transversalimpuls der Mesonen (bezüglich der Richtung  $\mathbf{p}_q$ ) mit einem Mittelwert von etwa 300 MeV und die Masse der Mesonen, wobei dann die Einhaltung des Energiesatzes überprüft werden muss. Durch entsprechende Wahl der *flavor*-Quantenzahlen der Quarks und der Spins der Mesonen wird versucht, die empirisch gefundenen Häufigkeitsverteilungen möglichst genau nachzubilden.

Es lässt sich denken, dass moderne Hadronisierungsprogramme technisch sehr kompliziert sind, obwohl sie auf relativ einfachen Prinzipien beruhen. Die

Entwicklung dieser Verfahren ging Hand in Hand mit der Entstehung eines neuen Zweiges der Physik, der sog. *computational physics*, bei der nur noch die Grundannahmen analytisch formuliert werden, während die quantitative Lösung einer bestimmten Fragestellung ausschließlich numerisch bestimmt wird.

### Übungen

- 5.1 Berechnen Sie den Farbfaktor, der für Quarks einer bestimmten Farbe im Prozess  $q \rightarrow q + g$  anzuwenden ist.
- 5.2 Zeigen Sie, dass für einen Endzustand  $q\bar{q}g$  aus drei masselosen Partonen der *thrust* durch  $T = \max(x_1, x_2, x_3)$  gegeben ist.
- 5.3 Berechnen Sie den Mittelwert von  $T$  für eine isotrope Verteilung der auslaufenden Teilchen.