

4 *Hadronen in der Quantenchromodynamik*

Christoph Berger

Einführung

Das Quarkmodell war von Anfang seiner Entwicklung an sehr erfolgreich in der Erklärung des Spektrums der Hadronen. Mit Hilfe von nur drei Konstituenten (den u -, d -, s -Quarks) gelang es, Ordnung in den sog. „Zoo der Elementarteilchen“ zu bringen. Zur Zeit der Erfindung des Modells, also in den 1960er Jahren, bestand dieser Zoo allerdings nur aus etwa 20 Baryonen und 20 Mesonen, von denen einige sich durch die neue Quantenzahl S (Seltsamkeit, *strangeness*) von den anderen abhoben.

Diesem Erfolg standen auf der anderen Seite scheinbar unüberwindliche Probleme gegenüber. Wenn Baryonen und Mesonen wirklich aus Quarks aufgebaut sein sollten, dann musste es doch möglich sein, sie in diese Konstituenten zu zerlegen, genauso wie das vorher mit den aus Konstituenten aufgebauten Atomen und Kernen gelungen war. Alle Experimente dieser Art sind aber fehlgeschlagen. Ebenso schien es, dass eine dynamische Erklärung der Quarkbindung in Widerspruch zum Pauli-Prinzip geriet, das sich bisher als unentbehrlich zur Aufklärung der Struktur der Atome und Kerne erwiesen hatte.

Aus all diesen Schwierigkeiten hat uns schließlich die Quantenchromodynamik (QCD) befreit. Diese Quantenmechanik von Quarks mit Farbladung soll jetzt näher betrachtet werden. Wir folgen also nicht der historischen Entwicklung des Quarkmodells und der dahinter stehenden gruppentheoretischen Diskussion der *flavor*-Symmetrie, sondern beginnen in den ersten beiden Abschnitten mit der Einführung der Farbla-

C. Berger, Prof. Dr.
I. Physikalisches Institut, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland. E-mail: berger@rwth-aachen.de

dung und der Gluonen. Hierzu gehört notwendigerweise eine genaue Diskussion der zugehörigen Symmetriegruppe. Im dritten Abschnitt folgt eine Behandlung des Spektrums der Hadronen. Der vierte und fünfte Abschnitt soll zeigen, wie selbst Details des Massenspektrums und der Zerfallsraten verständlich werden. Im sechsten Abschnitt wird dann die Entdeckung langlebiger massereicher Hadronen und ihre Erklärung als Bindungszustände neuer schwerer Quarks behandelt. Diese experimentelle Entdeckung hat ganz entscheidend zur Entwicklung des Standardmodells beigetragen. Die Entdeckung des *top*-Quarks im Jahre 1995 markiert einen weiteren Höhepunkt dieser Entwicklung.

4.1 Quarks mit Farbe

4.1.1 Das Statistik-Problem

Das in Abschn. 1.2.4 eingeführte Konstruktionsprinzip, Baryonenzustände aus drei Quarks aufzubauen, führt uns bei näherem Studium in eine Sackgasse. Um dies einzusehen, betrachten wir die Wellenfunktion der Δ^{++} -Resonanz im Zustand $J_3 = 3/2$,

$$|\Delta^{++}\rangle = |uuu\rangle |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle . \quad (4.1)$$

Wir haben wieder die *ket*-Notation für die Zustände gewählt, die wir etwas großzügig auch als Wellenfunktion bezeichnen werden. Für die Spinzustände wurde hier eine eingängige Bezeichnungsweise benutzt, bei der jedem Wert $j_3 = \pm 1/2$ ein aufwärts bzw. abwärts gerichteter Pfeil zugeordnet wird. Die Bahnwellenfunktion der Quarks wird nicht explizit angegeben. Da die Δ -Resonanz das leichteste Spin $3/2$ -Baryon bildet, liegt es sehr nahe anzunehmen, dass die relativen Bahndrehimpulse aller Quarks verschwinden, $l_{(i)} = 0$. Auch in der Atom- und Kernphysik haben die energetisch niedrigsten Zustände zusammengesetzter Systeme einen verschwindenden Bahndrehimpuls. Die Wellenfunktion (4.1) ist damit symmetrisch beim Vertauschen zweier Quarks und deshalb im Widerspruch zum Pauli-Prinzip, das zwingend eine total antisymmetrische Wellenfunktion für Systeme identischer Fermionen fordert.

Dieses wirklich fundamentale Problem lässt sich sehr elegant umgehen, falls wir verlangen, dass die Quarks sich in einer weiteren neuen Eigenschaft unterscheiden. Baryonen sind aus drei Quarks aufgebaut, es muss daher drei Einstellungen dieser Eigenschaft geben.¹ In Anlehnung an die Farbentheorie mit ihren drei Grundfarben Rot (*R*), Grün (*G*) und Blau (*B*) wird dieser

¹ Mit einer zweiwertigen Quantenzahl wie z. B. dem Spin lässt sich eine total antisymmetrische Wellenfunktion für drei Quarks nicht aufbauen.

neue innere Freiheitsgrad der Quarks als Farbe (*color*) bezeichnet. Es wird sich in der quantitativen Diskussion des nächsten Abschnitts zeigen, dass die antisymmetrischen Baryonenzustände gruppentheoretisch zu Farbsingulets gehören, d. h. sie sind farbneutral oder in der Sprache der Farbentheorie weiß. Diese Tatsache ist von größter Wichtigkeit, da im Spektrum der Hadronen kein zusätzlicher Freiheitsgrad beobachtet wird, der sich mit der Farbe identifizieren lässt.

Man muss zugeben, dass die Einführung eines neuen inneren Freiheitsgrades der Quarks *nur* zur Behebung der Schwierigkeiten mit der Wellenfunktion der Δ -Resonanz problematisch ist. Es wurde daher intensiv nach Auswegen gesucht. Die Zuordnung von antisymmetrischen Bahnwellenfunktionen z. B. hatte aber keine überzeugenden Erfolge vorzuweisen. Es wurde auch diskutiert, das Pauli-Prinzip im Quarksektor aufzugeben, also eine neue Statistik für die Quarks einzuführen. Es hat sich jedoch schließlich erwiesen, dass die Farbhypothese der einfachste Weg zur Behebung der diskutierten Schwierigkeiten ist, da sie in Verbindung mit der Forderung nach weißen Hadronen das Bauprinzip des Abschn. 1.2.4 für Mesonen und Baryonen theoretisch begründet: Wir werden zeigen, dass *nur* die Zustände $|q\bar{q}\rangle$ und $|qqq\rangle$ farbneutral sind. Neben den Quarks selbst sind also z. B. Diquarks $|qq\rangle$ oder Kombinationen wie $|qq\bar{q}\rangle$ als beobachtbare Hadronen verboten.

4.1.2 Die Gruppe $S U 3$

Die folgenden Betrachtungen sind für den ungeübten Leser nicht ganz einfach. Es hilft sicher, zur Vorbereitung nochmals Abschn. 2.2 über die Drehgruppe und Abschn. 2.8 über $S U 2$ durchzuarbeiten.

Einführung der Gruppe. Die Farbzustände $|R\rangle, |G\rangle$ und $|B\rangle$ sind die orthonormierten Basisvektoren $|e_i\rangle$ in einem dreidimensionalen, komplexen Vektorraum. Ein beliebiger Zustand in diesem Raum ist durch

$$|\psi\rangle = q^i |e_i\rangle \quad (4.2)$$

gegeben. Wir benutzen wieder die Summenkonvention, dass über gleiche Indizes summiert wird. Die Matrizen U der unitären, unimodularen (d. h. $\det U = 1$) Koordinatentransformationen

$$q'^i = U^i_k q^k \quad (4.3)$$

in diesem Raum bilden eine Gruppe, nämlich die Gruppe $S U 3_C$. Der Index C soll darauf hinweisen, dass es sich um Farbtransformationen handelt. Im Laufe der historischen Entwicklung der Teilchenphysik wurde die genann-

te Gruppe allerdings zuerst im Sortenraum der drei Quarks u, d, s untersucht. Wie immer drücken wir die Matrizen U durch ihre Generatoren λ_i aus,

$$U = e^{-i\Theta_i \lambda_i / 2} . \quad (4.4)$$

Mit Hilfe der Relation (2.497) folgt für die Ordnung der Gruppe $m=8$, d. h. es gibt acht linear unabhängige, hermitesche, spurfreie 3×3 -Matrizen λ_i und acht reelle Parameter Θ_i . In der Wahl einer speziellen Darstellung für die Generatoren λ_i ist man an sich relativ frei. Historisch hat sich aber infolge der Diskussion der $SU(3)_F$ im Sortenraum eine Konvention durchgesetzt, bei der die ersten drei Generatoren durch Ergänzen der τ_i -Matrizen (2.139) gewonnen werden,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.5)$$

Die Matrizen λ_4, λ_5 bzw. λ_6, λ_7 werden ebenso nach dem Muster von $\tau_{1,2}$ gebildet, nur erfolgt die Ergänzung in der zweiten bzw. ersten Spalte und Zeile, also

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

und

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.7)$$

$SU(3)$ hat gemäß (2.498) den Rang 2, es gibt also zwei diagonalisierbare Generatoren. Über einen davon, λ_3 , haben wir schon verfügt, der zweite wird durch

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

² Der Index F steht hier für *flavor*, bezeichnet also die Gruppenstruktur bezüglich der Sorte der Quarks und nicht der Farbe.

Tabelle 4.1 Die Strukturkonstanten der $SU(3)$

ijk	f_{ijk}
123	1
147	1/2
156	-1/2
246	1/2
257	1/2
345	1/2
367	-1/2
458	$\sqrt{3}/2$
678	$\sqrt{3}/2$

festgelegt. Der Faktor $1/\sqrt{3}$ ist eine Folge der Normierungsbedingung. Diese verlangt, dass die Spur der Quadrate der einzelnen Generatoren den gleichen Wert (hier also 2!) hat. Dieses Maß für das relative Gewicht der Generatoren macht auch anschaulich einen Sinn, da die Quadrate der λ -Matrizen ebenso wie die Quadrate der τ_i , nach deren Muster sie konstruiert wurden, Diagonalmatrizen sind.

Die Vertauschungsrelationen der λ -Matrizen definieren eine Algebra

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} \quad (4.9)$$

mit total antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{ijk} , auch die $SU(3)$ ist also halbeinfach und kompakt. Die aus den Vertauschungsrelationen folgenden nicht verschwindenden Werte der Strukturkonstanten sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

Darstellungen der $SU(3)$. Die Darstellungen der $SU(3)$ sind $n \times n$ -Matrizen U , die in einem n -dimensionalen Vektorraum operieren. Der Einfachheit halber wird das gleiche Symbol U für die Darstellungen wie für die Matrizen der Gruppe selbst gewählt. Diese Darstellungen haben die allgemeine Form

$$U = e^{-i\Theta_i F_i} \quad , \quad (4.10)$$

und zu ihrer expliziten Konstruktion kann man sich wieder der Algebra der F -Spin-Operatoren

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k \quad (4.11)$$

bedienen.³ Im Unterschied zu $SU(2)$ und $SO(3)$ ist jede Darstellung jetzt durch die Eigenwerte von zwei Casimir-Operatoren und damit durch die Angabe von zwei ganzen Zahlen p und q charakterisiert, da $SU(3)$ den Rang 2 hat. Einer dieser beiden Operatoren ist ganz analog zum Fall der $SU(2)$ gebildet, wobei die Summe jetzt aber von 1 bis 8 läuft:

$$\mathbf{F}^2 = \sum_i \mathbf{F}_i^2 . \quad (4.12)$$

Die Eigenwerte lassen sich aus der Formel

$$f^2 = \frac{1}{3}(p^2 + q^2 + pq) + p + q \quad (4.13)$$

berechnen, und die Dimension $n = D(p, q)$ der Darstellungen ist mit p und q über

$$D(p, q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \quad (4.14)$$

verknüpft. Wir haben hier leider nicht die Möglichkeit, diese Relationen zu beweisen und die Darstellungen aus der F -Spin-Algebra zu konstruieren; in dem klassischen Lehrbuch von Gasiorowicz [Gas75] oder in den Büchern von Georgi [Geo82] bzw. Costa und Fogli [Cos12] findet der Leser aber eine sehr schöne Diskussion dieser Zusammenhänge.

In der Tabelle 4.2 sind die niedrigsten Dimensionen $D(p, q)$ mit den zugehörigen Wertepaaren von p und q angegeben. Als wichtigste Merkregel lesen wir aus dieser Tabelle ab, dass $SU(3)$ neben dem (trivialen⁴) Singulett auf jeden Fall noch drei-, sechs-, acht- und zehndimensionale Darstellungen besitzt.

Die Fundamentaldarstellung, das Triplett, ist wieder durch die Matrizen der Gruppe selbst gegeben, also gilt für die Generatoren

$$F_i = \lambda_i/2 . \quad (4.15)$$

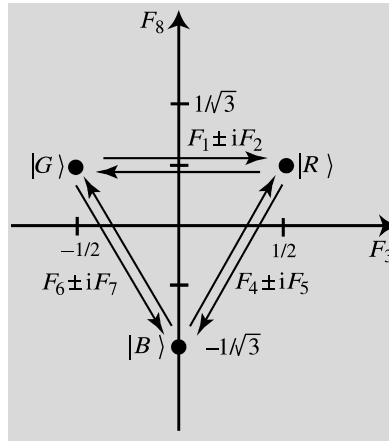
Die zugehörigen Basisvektoren innerhalb des Multipletts, in unserem Fall also die Farbzustände $|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$, unterscheiden sich durch die Eigenwerte zu F_3 und F_8 . Man stellt sie graphisch in einem sog. Gewichtsdiagramm (Abb. 4.1) dar, das entsprechend dem Rang 2 der Gruppe die Ebene ausfüllt.

³ Die Physiker bezeichnen die Operatoren F_i gerne mit F -Spin, in Anlehnung an die Gruppe $SU(2)$, bei der die entsprechenden Operatoren wirklich mit dem Spin oder Isospin identifiziert werden können.

⁴ $U=1, F_i=0$.

Tabelle 4.2 Die niedrigsten Darstellungen von $SU(3)$

Symbol	Name	p, q	$D(p, q)$
1	Singulett	0,0	1
3	Triplett	1,0	3
3*	Antitriplett	0,1	3
8	Oktett	1,1	8
6	Sextett	2,0	6
10	Dekuplett	3,0	10

**Abb. 4.1** Gewichtsdiagramm für das Quark-Farbtuplett

Analog zum Vorgehen bei $SU(2)$ fasst man auch bei $SU(3)$ die neben den Eigenwertoperatoren verbleibenden Generatoren zu Leiteroperatoren zusammen. Durch sie kann man Zustände ineinander überführen. Ihre Wirkung lässt sich sehr anschaulich durch die Pfeile in Abb. 4.1 verdeutlichen.

Beispiel 4.1

Als Darstellung der Basisvektoren $|R\rangle, |G\rangle, |B\rangle$ wählen wir die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann verifiziert man mit Hilfe von (4.15) sofort

$$F_3 |R\rangle = \frac{1}{2} |R\rangle$$

oder

$$F_8 |B\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}} |B\rangle .$$

Weiterhin ist es leicht, die Wirkung der Leiteroperatoren zu überprüfen. Als Beispiel wird

$$F_1 + iF_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet. Offenbar gilt $(F_1 + iF_2)|G\rangle = |R\rangle$, wie es auch zu erwarten war.

Neben der Fundamentaldarstellung bilden auch die Matrizen der zu (4.3) konjugiert komplexen Gleichung

$$q'^{*i} = (U^*)^i_k q^{*k} \quad (4.16)$$

eine von der Fundamentaldarstellung linear unabhängige Darstellung in drei Dimensionen. Dies ist ein wichtiger Unterschied zu $SU(2)$. Wir hatten bereits in Abschn. 2.8 festgestellt, dass Isospintransformationen und Teilchen-Antiteilchen-Konjugation nicht unabhängig voneinander sind. Daher sind auch dort die Matrizen U^* linear abhängig von den Matrizen U .

Wegen

$$U^* = e^{-i\Theta_i(-\lambda_i^*/2)} \quad (4.17)$$

kehren sich die Vorzeichen der Eigenwerte von F_3 und F_8 um, und der Darstellungsraum wird daher durch die Antiteilchen $|\bar{R}\rangle, |\bar{G}\rangle, |\bar{B}\rangle$ aufgespannt (siehe Abb. 4.2). Hier tritt die lineare Unabhängigkeit noch einmal klar zutage: Ein Zustand mit den Eigenwerten $1/\sqrt{3}$ und 0 zu F_8 und F_3 lässt sich nicht durch eine unitäre Transformation im Raum der Quarks erreichen.

Weil die konjugiert komplexen Komponenten eines Vektors gleich den mit einem unteren Index gekennzeichneten kovarianten Komponenten sind, transformiert sich ein beliebiger Antiteilchen-Zustand gemäß

$$q'_i = (U^*)^i_k q_k = (U^{-1})^k_i q_k . \quad (4.18)$$

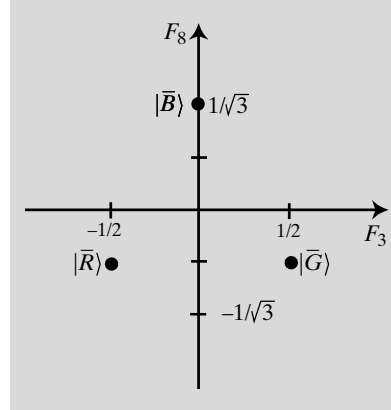


Abb. 4.2 Gewichtsdiagramm für das Antiquark-Farbtriplett

Häufig benutzt man in der Mathematik den Querstrich über einem Symbol zur Bezeichnung der Operation „konjugiert komplex“. In der Teilchenphysik ist dies besonders anschaulich, da die Antiteilchen den konjugiert komplexen Vektorkomponenten zugeordnet werden.

Produkte von Darstellungen. Unser Ziel ist es, Mesonen als $|q\bar{q}\rangle$ - und Baryonen als $|qqq\rangle$ -Zustände zu beschreiben. Das Studium der Produkte von Darstellungen ist daher von besonderem Interesse. Von den in der Literatur diskutierten Methoden führt die Untersuchung des Transformationsverhaltens von Tensoren, wenigstens für Produktdarstellungen niedriger Dimension, zu schnellen Erfolgen bei der Ausreduktion der Darstellungen.

Wir haben bisher Quarkzustände durch kontravariante Vektoren und Antiquarks durch kovariante Vektoren bezeichnet. Die Komponenten eines beliebigen Zustandes im Produktraum von r Quarks und s Antiquarks werden deshalb durch Tensoren

$$T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = q^{\alpha_1} \dots q^{\alpha_r} q_{\beta_1} \dots q_{\beta_s} \quad (4.19)$$

gebildet. Aufgrund der Transformationsgesetze (4.3) und (4.18) gilt für die Transformation der Produktzustände

$$T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = U^{\alpha_1}_{\gamma_1} \dots U^{\alpha_r}_{\gamma_r} (U^{-1})^{\delta_1}_{\beta_1} \dots (U^{-1})^{\delta_s}_{\beta_s} T_{\delta_1 \dots \delta_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r}. \quad (4.20)$$

Besonders interessant sind die irreduziblen Darstellungen. Diese bilden eine Teilmenge der Tensoren auf sich selbst ab. Die Darstellungsmatrizen U zerfallen daher in blockdiagonale Matrizen, wie es in Abschn. 2.2.5 am Beispiel der Drehgruppe erläutert wurde. Die Transformationsmatrizen selbst

sind für uns nicht so wichtig, sondern wir suchen das Bildungsgesetz für die irreduziblen Tensoren. Wenn man dieses gefunden hat, folgt daraus natürlich auch das Bildungsgesetz für die zugehörigen Basisvektoren. Glücklicherweise gelten für alle $SU(N)$ -Gruppen die gleichen Regeln zum Auffinden der irreduziblen Darstellungen [Geo82]. Die Aufgabe besteht im wesentlichen darin, vom ursprünglichen Tensor symmetrische Tensoren abzuspalten, solange es geht. Symmetrische Tensoren sind invariant unter der Vertauschung von zwei beliebigen oberen Indizes oder zwei beliebigen unteren Indizes. Wenn sie obere und untere Indizes enthalten, muss man sie auch noch spurfrei machen, d. h. man muss dafür sorgen, dass die Summe über Elemente mit jeweils einem gleichen oberen und unteren Index verschwindet. Wenn sich von dem Produkt keine weiteren symmetrischen Tensoren abspalten lassen, gehört auch der Rest zu einer irreduziblen Darstellung.

Das sieht alles komplizierter aus, als es ist. Wie so oft in der Physik reichen aber die einfachsten Beispiele zunächst aus. Dies wird in den beiden folgenden Abschnitten klarer werden. Wir hätten auch die Ergebnisse des Abschn. 2.8.2 schon mit der Tensormethode ableiten können, wollen das aber jetzt nicht wiederholen, sondern den Übungen vorbehalten.

4.1.3 Mesonen als $q\bar{q}$ -Zustände

Zur Konstruktion der Farbwellenfunktion von Mesonen, die ja aus Quark-Antiquark-Paaren bestehen, müssen wir offenbar den Tensor

$$T^i_k = q^i q_k \quad (4.21)$$

in irreduzible Tensoren zerlegen. Durch die Identität

$$T^i_k = \left(T^i_k - \frac{1}{N} \delta^i_k T^m_m \right) + \frac{1}{N} \delta^i_k T^m_m \quad (4.22)$$

wird dieser in einen symmetrischen spurfreien Tensor und die durch N geteilte Spur ($T^1_1 + T^2_2 + T^3_3$) zerlegt (δ^i_k bezeichnet wie üblich das Kronecker-Symbol). T^i_k ist eine $N \times N$ Matrix mit N^2 Komponenten. Durch die Spurfreiheit wird eine Nebenbedingung festgelegt, also hat der erste Tensor

$$n = N^2 - 1 \quad (4.23)$$

linear unabhängige Komponenten. Er erfüllt unsere Bedingungen und bildet deshalb eine irreduzible Darstellung mit der Dimension n . Die Spur ist der triviale Tensor ohne Indizes und daher ein Singulett unter $SU(N)$. Sie ist

demnach geeignet, den farbneutralen oder weißen Zuständen zugeordnet zu werden. Für $SU(3)$ haben wir also die Zerlegung

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \quad (4.24)$$

in ein farbneutrales Singulett und in ein Farboktett gewonnen. Zunächst ist damit bewiesen, dass man aus Quarks und Antiquarks farblose Zustände aufbauen kann. Für die normierte Singulettwellenfunktion muss ersichtlich

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle + |B\bar{B}\rangle) \quad (4.25)$$

angesetzt werden. Auch die Oktettzustände sind physikalisch sehr interessant. Wir werden sie bald mit den Gluonen identifizieren. Gemäß der Zerlegung (4.22) bestehen sie aus den sechs Zuständen

$$|R\bar{G}\rangle, |R\bar{B}\rangle, |G\bar{R}\rangle, |G\bar{B}\rangle, |B\bar{R}\rangle, |B\bar{G}\rangle \quad (4.26)$$

und einer orthonormierten Linearkombination von zwei der drei Diagonalelemente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(2|R\bar{R}\rangle - |G\bar{G}\rangle - |B\bar{B}\rangle) \\ & \frac{1}{3}(-|R\bar{R}\rangle + 2|G\bar{G}\rangle - |B\bar{B}\rangle) \\ & \frac{1}{3}(-|R\bar{R}\rangle - |G\bar{G}\rangle + 2|B\bar{B}\rangle) . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Es ist üblich, den $SU(2)$ -Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\bar{R}\rangle - |G\bar{G}\rangle) \quad (4.28)$$

als eine der Wellenfunktionen zu wählen, dieser ergibt sich aus der Differenz der ersten beiden Zeilen von (4.27). Dann wird aus der Summe

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|R\bar{R}\rangle + |G\bar{G}\rangle - 2|B\bar{B}\rangle) \quad (4.29)$$

die achte Wellenfunktion gebildet. In der Tabelle 4.3 ist die vollständige Zerlegung $3 \otimes 3^*$ nochmals zusammengefasst. Die gegenüber dem Text auftretenden Vorzeichenunterschiede entsprechen einer Konvention, die sich als sinnvoll er-

Tabelle 4.3 Das Singulett (Zeile 1) und das Oktett (Zeilen 2 bis 9) aus Farb-Antifarbzuständen der Gruppe $S U 3_C$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(R\bar{R}\rangle + G\bar{G}\rangle + B\bar{B}\rangle)$
$ G\bar{B}\rangle$
$ R\bar{B}\rangle$
$- G\bar{R}\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(G\bar{G}\rangle - R\bar{R}\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{6}}(R\bar{R}\rangle + G\bar{G}\rangle - 2 B\bar{B}\rangle)$
$ R\bar{G}\rangle$
$- B\bar{R}\rangle$
$ B\bar{G}\rangle$

weisen wird, wenn wir die $S U 3$ -Symmetrie im Sortenraum ($u d s$) der Quarks behandeln.

4.1.4 Baryonen als $q q q$ -Zustände

Zur Konstruktion der Farbwellenfunktion von Baryonen müssen wir zunächst untersuchen, ob in der Produktdarstellung $3 \otimes 3 \otimes 3$ ein Singulett enthalten ist, da die beobachteten Baryonen natürlich farblos sein müssen. Wir beginnen mit dem Produkt von zwei Quarks. Der zugehörige Tensor T^{ik} lässt sich sofort in zwei Tensoren zerlegen, die symmetrisch bzw. antisymmetrisch bezüglich einer Indexvertauschung sind:

$$T^{ik} = \frac{1}{2}(T^{ik} + T^{ki}) + \frac{1}{2}(T^{ik} - T^{ki}) . \quad (4.30)$$

Der erste Tensor hat $(N^2 + N)/2$ linear unabhängige Komponenten, da bei einem symmetrischen Tensor die oberhalb und unterhalb der Diagonale stehenden Elemente identisch sind. Er erfüllt offenbar die Symmetriebedingung und bildet daher eine irreduzible Darstellung der Dimension

$$n = \frac{1}{2}(N^2 + N) \quad (4.31)$$

unter $S U N$, während zum zweiten eine irreduzible Darstellung der Dimension

$$n' = \frac{1}{2}(N^2 - N) \quad (4.32)$$

gehört, da er sich ebenfalls nicht weiter reduzieren lässt. In $SU(3)$ erfüllt sogar der zweite Tensor explizit die Symmetriebedingung. Dies sehen wir durch einen kleinen Umweg ein. Im Fall der $SU(3)$ ist das Bildungsgesetz des zweiten Tensors sichtlich mit

$$V_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T^{jk} \quad (4.33)$$

identisch, wobei ε_{ijk} der schon in Abschn. 2.2 eingeführte total antisymmetrische Tensor ist. Hiermit gilt dann z. B. für $i = 1$

$$V_1 = \frac{1}{2}(T^{23} - T^{32}) \quad (4.34)$$

und eine entsprechende Beziehung für $i = 2, 3$. Die drei Komponenten bilden also einen Tensor mit nur einem (unteren) Index und erfüllen daher das Symmetrieprinzip. Dieser Trick der Kontraktion der Indizes lässt sich auch bei komplizierteren Produkten anwenden.

Tensoren mit nur einem Index nennen wir Vektoren. Die besondere Eigenschaft, dass der gemäß (4.30) gebildete antisymmetrische Tensor wieder ein Vektor ist, hat $SU(3)$ mit $O(3)$ gemeinsam. Dort ist dieser Tensor als das Kreuzprodukt zweier Vektoren bekannt. Denken Sie z. B. an die Komponenten des Drehimpulses, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Die Darstellung $3 \otimes 3$ ist nun ausreduziert. Es gilt

$$3 \otimes 3 = 3^* \oplus 6 \quad (4.35)$$

Ein Singulett lässt sich also aus zwei Quarks nicht bilden. Aber wegen

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \quad (4.36)$$

ist sofort klar, dass in $3 \otimes 3 \otimes 3$ ein Singulett enthalten ist. Mit Hilfe von (4.33) und (4.22) lässt sich der zugehörige Tensor

$$T^0_0 = \varepsilon_{ijk}q^iq^jq^k \quad (4.37)$$

leicht konstruieren. Farblose Baryonen werden daher durch die $SU(3)_C$ -Singulettwellenfunktion

Tabelle 4.4 Das Singulett (Zeile 1) und Oktett (Zeile 2 bis 9) aus drei Quarks in der Gruppe $SU(3)_C$

$\frac{1}{\sqrt{6}}(RGB\rangle - RBG\rangle + BRG\rangle - BGR\rangle + GBR\rangle - GRB\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(GRG\rangle - GGR\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(RRG\rangle - RGR\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(GBG\rangle - GGB\rangle)$
$\frac{1}{2}(RBG\rangle - RGB\rangle + GBR\rangle - GRB\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{12}}(RGB\rangle - RBG\rangle + GBR\rangle - GRB\rangle + 2 BGR\rangle - 2 BRG\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(RRR\rangle - RRB\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(BBG\rangle - BGB\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(BBR\rangle - BBB\rangle)$

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|RGB\rangle - |RBG\rangle + |BRG\rangle - |BGR\rangle + |GBR\rangle - |GRB\rangle) \quad (4.38)$$

beschrieben. Sie ist antisymmetrisch bei Vertauschung von zwei beliebigen Farbindizes und garantiert damit die Erfüllung der im ersten Abschnitt dieses Kapitels geforderten Bedingung zur Erfüllung des Pauli-Prinzips.

Der Vollständigkeit halber soll noch die komplette Zerlegung der Produktdarstellung von drei Quarks in irreduzible Darstellungen angegeben werden. Das in (4.36) enthaltene Oktett gewinnen wir aus den Zuständen der Tabelle 4.3, indem wir entsprechend der Vorschrift (4.33) jede Antifarbe durch die passende Vertauschung zweier Farben ersetzen, also z. B. \bar{R} durch $G B - B G$. Die Zustände müssen anschließend noch normiert werden. Das Ergebnis ist in der Tabelle 4.4 angegeben, die der Leser ohne allzu große Schwierigkeiten nachrechnen können sollte.

Es lässt sich ebenfalls relativ leicht abzählen, dass sich aus den Produkten $T^{ijk} = q^i q^j q^k$ genau zehn Zustände konstruieren lassen, die vollständig symmetrisch in den oberen Indizes sind. Zunächst gibt es drei Zustände mit drei identischen Quarks, also $|RRR\rangle$, $|GGG\rangle$ und $|BBB\rangle$. Dann kommen die Zustände, in denen zwei Quarks identisch sind. Dazu gehört z. B. $|RGG\rangle$, welcher durch Symmetrisierung und Normierung zu

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|RGG\rangle + |GRG\rangle + |GGR\rangle) \quad (4.39)$$

wird. Auf diese Art lassen sich sechs Zustände konstruieren. Der zehnte Zustand $|RGB\rangle$ ist in allen drei Quarks unterschiedlich und nimmt nach Symmetrisierung und Normierung die Gestalt

Tabelle 4.5 Das Dekuplett aus drei Quarks in der Gruppe $SU(3)_C$

$ RRR\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{3}}(RRG\rangle + RGR\rangle + GRR\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{3}}(RGG\rangle + GRG\rangle + GGR\rangle)$
$ GGG\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{3}}(RRB\rangle + RBR\rangle + BRR\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{6}}(RGB\rangle + RBG\rangle + BRG\rangle + BGR\rangle + GBR\rangle + GRB\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{6}}(GGB\rangle + GBG\rangle + BGG\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{3}}(RBB\rangle + BRB\rangle + BBR\rangle)$
$\frac{1}{\sqrt{3}}(GBB\rangle + BGB\rangle + BBG\rangle)$
$ BBB\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(|RGB\rangle + |RBG\rangle + |BRG\rangle + |BGR\rangle + |GBR\rangle + |GRB\rangle) \quad (4.40)$$

an. Das Ergebnis ist in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

Die 18 Zustände des Produkts $3 \otimes 6$ folgen offenbar dem Bildungsgesetz

$$T^{ijk} = q^i(q^j q^k + q^k q^j) . \quad (4.41)$$

Um diese Produkte in irreduzible Darstellungen zu zerlegen, wird das Dekuplett der Tabelle 4.5 abgespalten. Das lässt sich z.B. dadurch erledigen, dass man eine Liste der 18 Zustände anfertigt. In dieser Liste erkennt der fleißige Leser sofort, dass die vollständig symmetrischen Zustände der zehn-dimensionalen Darstellung entweder direkt auftauchen oder durch einfache Linearkombinationen zu erhalten sind. Die Linearkombinationen werden so konstruiert, dass sie jeweils orthogonal zueinander sind. Nach Abtrennen des Dekupletts bleiben acht Zustände übrig. Sie bilden eine alternative Darstellung der Dimension acht und sind in der Tabelle 4.6 – wieder unter Verwendung einer für spätere Zwecke nützlichen Phasenkonvention – ebenfalls zusammengestellt.

Unter Benutzung von

$$3 \otimes 6 = 8 \oplus 10 \quad (4.42)$$

sind wir nun bei der gesuchten Zerlegung

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad (4.43)$$

angelangt.

Tabelle 4.6 Das alternative Oktett aus drei Quarks in der Gruppe $SU(3)_C$

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{\sqrt{6}}(|GGR\rangle + |GGR\rangle - 2|RG\bar{G}\rangle) \\
\frac{1}{\sqrt{6}}(-|RRG\rangle - |RGR\rangle + 2|GRR\rangle) \\
\frac{1}{\sqrt{6}}(|GGB\rangle + |GBG\rangle - 2|BGG\rangle) \\
\frac{1}{\sqrt{12}}(|RGB\rangle + |RBG\rangle + |GRB\rangle + |GBR\rangle - 2|BRG\rangle - 2|BGR\rangle) \\
\frac{1}{\sqrt{6}}(|RRB\rangle + |RBR\rangle - 2|BRR\rangle) \\
\frac{1}{\sqrt{6}}(-|BGB\rangle - |BBG\rangle + 2|GBB\rangle) \\
\frac{1}{\sqrt{6}}(-|BRB\rangle - |BBR\rangle + 2|RBB\rangle) \\
1/2(|GRB\rangle + |GBR\rangle - |RGB\rangle - |RBG\rangle)
\end{array}$$

In $3 \otimes 3 \otimes 3$ ist also genau ein Singulett enthalten. Daneben können drei Quarks noch Farboktetts und Dekupletts bilden. Natürlich lassen sich auch aus drei Antiquarks oder aus Produkten von $|q\bar{q}\rangle$, $|qqq\rangle$ und $|\bar{q}\bar{q}\bar{q}\rangle$ Farbsingulett konstruieren. Dies ist z. B. für den Einbau der Kernphysik in das Quarkmodell sehr wichtig. In $SU(3)$ ist es aber auf *keine* andere Art und Weise möglich, ein Singulett durch Produkte dreidimensionaler Darstellungen zu erhalten. Mit der Forderung, dass Hadronen farblos sind, bleiben also nur zwei fundamentale Möglichkeiten, nämlich $|q\bar{q}\rangle$ und $|qqq\rangle$, um Hadronen aus Quarks aufzubauen.

Übungen

- 4.1 Rechnen Sie die Werte der Tabelle 4.1 nach und überprüfen Sie die Normierung der λ -Matrizen. Besonders einfach geht das wieder bei Verwendung algebraischer Programme.
- 4.2 Benutzen Sie die Tensormethode zur Bestimmung der Darstellungen eines Quark-Quark- bzw. Quark-Antiquark-Zustandes in $SU(2)$.
- 4.3 Beweisen Sie durch explizite Konstruktion, dass die unitäre Transformation $U_1 = e^{-i\Theta F_1}$ das Singulett (4.25) invariant lässt.