





# *Elementare Quantenelektrodynamik*

Christoph Berger

## **Einführung**

Die Quantenelektrodynamik (QED) wurde zunächst als Theorie der Wechselwirkung von Elektronen, Positronen und Photonen entwickelt. Es hat sich aber gezeigt, dass sie die elektromagnetische Wechselwirkung aller geladenen Leptonen mit hoher Präzision beschreibt. Da die Quarks geladene Fermionen sind, lag es nahe, die Formeln der QED auf Streuprozesse, an denen Quarks beteiligt sind, zu übertragen. Darüber hinaus ist die QED das Modell für weitergehende Theorien der Wechselwirkung von Fermionen unter Austausch von Bosonen (Kap. 1). Es ist also klar, dass am Anfang jeder quantitativen Reaktionslehre in der Teilchenphysik eine Einführung in die Quantenelektrodynamik erforderlich ist. Bei dem hier vorgestellten Zugang zur QED handelt es sich nicht um eine systematische Begründung, sondern um eine Bereitstellung des benötigten Handwerkszeugs zur Berechnung von Formeln, die sich mit dem Experiment vergleichen lassen. Auf solche Vergleiche und auf die Anwendung der erarbeiteten Ergebnisse lege ich besonderen Wert. Man findet eine ausführliche Behandlung der theoretischen Grundlagen in vielen Textbüchern der relativistischen Quantentheorie [Sch61, Jau76], v. a. aber in dem bekannten Buch von Bjorken und Drell [Bjo90] oder in dem schönen neueren Buch von Peskin und Schroeder [Pes95].

---

C. Berger, Prof. Dr.

I. Physikalisches Institut, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland. E-mail: [berger@rwth-aachen.de](mailto:berger@rwth-aachen.de)

### 3.1 Dirac-Gleichung und Feynman-Regeln

Die relativistische Wellengleichung für Fermionen wurde von Dirac gefunden. Wir beginnen daher im ersten Teil mit einer Diskussion der Dirac-Gleichung für freie Fermionen und untersuchen ihre Lösungen im zweiten Abschnitt. Im dritten Abschnitt werden dann Feynman-Regeln für wechselwirkende Teilchen anhand des Beispiels der elektromagnetischen Wechselwirkung erläutert. Schließlich wird im vierten Abschnitt der Versuch unternommen, eine anschauliche Diskussion der sog. Renormierung durchzuführen.

#### 3.1.1 Die Dirac-Gleichung

Die nichtrelativistische Quantenmechanik wird bekanntlich durch die Schrödinger-Gleichung beherrscht. Für freie Teilchen ist diese berühmte Gleichung nichts anderes als die Energie-Impuls-Beziehung

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = E \quad (3.1)$$

in Operatorform

$$\hat{H}\psi = \hat{E}\psi \quad , \quad (3.2)$$

wobei der Energieoperator durch

$$\hat{E} = i \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.3)$$

definiert ist. Der Hamilton-Operator  $\hat{H}$  ist wegen

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla \quad (3.4)$$

in der üblichen Weise durch

$$\hat{H} = -\frac{\Delta}{2m} \quad (3.5)$$

festgelegt, und die Wellenfunktion  $\psi$  hängt hier vom Ortsvektor und der Zeit ab,  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ .

Die Dirac-Gleichung entstand historisch aus dem Wunsch, eine relativistische Wellengleichung zu haben, die ebenfalls linear in der Ableitung nach der Zeit ist,

$$\hat{H}^{\text{rel}}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi . \quad (3.6)$$

Der relativistische Zusammenhang zwischen Energie und Impuls lautet bekanntlich

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 , \quad (3.7)$$

jedoch führt der naheliegende Ansatz

$$\hat{H}^{\text{rel}} = \sqrt{-\Delta + m^2} \quad (3.8)$$

nicht zum gewünschten Erfolg, da die daraus vielleicht ableitbare Wellengleichung Orts- und Zeitkoordinaten unterschiedlich behandelt. Damit würde sie in jedem Lorentz-System eine andere Form bekommen. Schon wegen dieser fehlenden relativistischen Kovarianz muss man (3.8) ablehnen.

Dirac wählte als linearen Ansatz

$$\hat{H}^{\text{rel}} = \boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta m , \quad (3.9)$$

wobei der Koeffizientenvektor

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

und der Koeffizient  $\beta$  noch zu bestimmen sind. Dazu schreiben wir die Diracsche Wellengleichung erst einmal explizit an,

$$-i\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right) + \beta m\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} . \quad (3.11)$$

Im nächsten Schritt iterieren wir diese Gleichung, d. h. wir wenden auf die linke Seite nochmals  $\hat{H}^{\text{rel}}$  und auf die rechte Seite  $i\partial/\partial t$  an. Dies ergibt

$$- \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\alpha_j \alpha_i + \alpha_i \alpha_j}{2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - im \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m^2 \psi = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} . \quad (3.12)$$

Wir lassen dieses Ergebnis für einen Moment auf sich beruhen. Ganz ähnlich wie beim Ableiten der Schrödinger-Gleichung kann man eine relativistische Wellengleichung auch direkt aus der Energie-Impuls-Beziehung (3.7) gewinnen,

$$- \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\Delta \phi + m^2 \phi . \quad (3.13)$$

Natürlich müssen die Lösungen  $\psi$  des linearisierten Hamilton-Operators dieser Klein-Gordon-Gleichung genügen.<sup>1</sup> Dies gibt uns jetzt ein Mittel an die Hand, die Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta$  zu bestimmen. Offenbar ist (3.12) nur dann identisch mit der Klein-Gordon-Gleichung für  $\psi$ , falls

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \quad (3.14)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (3.15)$$

$$\beta^2 = 1 \quad (3.16)$$

gilt. An der Nichtvertauschbarkeit der Koeffizienten  $\alpha_i$  und  $\beta$  sieht man sofort, dass diese keine Zahlen sein können. Dirac schlug vor, sie als Matrizen und die Lösungen  $\psi$  als Spaltenvektoren zu behandeln. Das ist gewissermaßen der Preis, den man für die Linearisierung der Klein-Gordon-Gleichung bezahlen muss.

Zunächst untersuchen wir die Eigenschaften dieser Matrizen etwas detaillierter. Aus (3.14) folgt ganz analog zur Beziehung (3.16) für die  $\alpha_i$  unmittelbar

$$\alpha_i^2 = 1 . \quad (3.17)$$

Weiter müssen die Koeffizientenmatrizen hermitesch und spurfrei sein. Die erste Eigenschaft folgt aus der Hermitezität des Hamilton-Operators, die zweite ist schnell bewiesen. Wegen (3.15) und (3.16) gilt

---

<sup>1</sup> Diese Gleichung wurde schon im Abschn. 2.1 bei der Diskussion der Normierungsfaktoren benutzt.

$$\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta \quad . \quad (3.18)$$

Jetzt wird von beiden Seiten die Spur berechnet. Unter der Spur lassen sich Matrizen jedoch zyklisch vertauschen,  $\text{Sp } \beta\alpha_i\beta = \text{Sp } \beta^2\alpha_i$ . Dies führt unmittelbar zu der Relation  $\text{Sp } \alpha_i = -\text{Sp } \alpha_i$ , die nur erfüllt sein kann, wenn die Spur der  $\alpha$ -Matrizen verschwindet. Ganz ähnlich verläuft der Beweis für  $\beta$ .

Die Gleichung (3.14) wird durch die Paulischen Spinmatrizen  $\sigma_i$  erfüllt. Diese haben wir in Abschn. 2.2.4 diskutiert. Sie lassen sich aber nicht mit den  $\alpha_i$  identifizieren, da es keine vierte linear unabhängige Matrix zur Erfüllung der Bedingung (3.15) gibt. Elementare algebraische Überlegungen zeigen nun, dass die benötigten Matrizen mindestens die Dimension vier haben müssen. Demnach sind auch die  $\psi$ -Funktionen vierdimensionale Spaltenvektoren. Eine Standarddarstellung der Matrizen lässt sich aus den Pauli-Matrizen und der zweidimensionalen Einheitsmatrix aufbauen:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

und

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (3.20)$$

wobei auch die Symbole „0“ und „1“ selbst wieder als  $2 \times 2$ -Matrizen interpretiert werden müssen.

Um zu einer modernen Schreibweise der Dirac-Gleichung zu gelangen, führen wir zunächst formal die vier  $\gamma$ -Matrizen ein. Sie sind durch

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta \\ \gamma^i &= \beta\alpha_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

definiert. Aus den Vertauschungsrelationen für  $\alpha_i$  und  $\beta$  lassen sich für die  $\gamma^\mu$  die wichtigen Vertauschungsrelationen

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (3.22)$$

ableiten. Die eigentlich benötigte vierdimensionale Einheitsmatrix auf der rechten Seite wurde wieder zur Vereinfachung der Notation weggelassen. Der metrische Tensor  $g^{\mu\nu}$  wurde schon in Abschn. 2.3.2 eingeführt.

Die  $\gamma$ -Matrizen mit einem unteren Index (also  $\gamma_\nu$ ) sind ähnlich wie normale Vierervektoren durch

$$\gamma_\nu = g_{\nu\mu}\gamma^\mu \quad (3.23)$$

definiert. Der Vollständigkeit halber sei auch noch die explizite Darstellung der  $\gamma^i$  angegeben,

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.24)$$

Mit Hilfe dieser neuen Matrizen nimmt die Beziehung (3.11) die Gestalt

$$i \left( \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \psi - m\psi = 0 \quad (3.25)$$

an, worin ganz im Sinne einer konsistenten relativistischen Notation  $x^0 = t$  benutzt wurde. Unter Verwendung der beliebten *dagger*-Abkürzung für das Produkt von  $\gamma$ -Matrizen und Vierervektoren

$$\not{a} = \gamma^\mu a_\mu \quad (3.26)$$

wird diese Gleichung schließlich unter Beachtung von

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.27)$$

zu

$$(i \not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (3.28)$$

bzw.

$$(\not{\not{p}} - m)\psi = 0 \quad (3.29)$$

umgeformt.<sup>2</sup> Das Hut-Symbol soll nochmal darauf hinweisen, dass hier der *Impulsoperator* gemeint ist. An den letzten beiden Schreibweisen der Dirac-Gleichung für freie Fermionen der Masse  $m$  meint man, ihre relativistische Kovarianz sozusagen mit Händen greifen zu können, da  $\gamma^\mu p_\mu$  wie ein Skalarprodukt von Vierervektoren aussieht. Es muss aber gesagt werden, dass die  $\gamma^\mu$  keinen Vierervektor bilden, sondern in jedem Lorentz-System die gleiche oben angegebene Darstellung haben. Der Beweis der relativistischen Kovarianz der Dirac-Gleichung ist daher auch etwas komplizierter [Bjo90].

---

<sup>2</sup> Die Eindeutschung englischer Fachwörter bleibt immer problematisch. Am Ende ist es bequemer, *dagger* oder *slash* zu benutzen als z. B. das schon fast poetisch klingende Wort „Feynman-Dolch“.



**Vertiefung**

Algebraische Manipulationen von Ausdrücken mit  $\gamma$ -Matrizen sind zu einer hohen Kunst entwickelt worden. Als einfachstes Beispiel betrachten wir  $\not{a} \not{b}$ :

$$\not{a} \not{b} = \gamma^\mu \gamma^\nu a_\mu b_\nu = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) a_\mu b_\nu \quad , \quad (3.30)$$

wobei der letzte Schritt mit Hilfe von (3.22) erfolgte. Dieses Ergebnis wird unmittelbar zu

$$\not{a} \not{b} = 2a \cdot b - \not{b} \not{a} \quad (3.31)$$

mit dem Spezialfall

$$\not{a} \not{a} = a \cdot a = a^2 \quad (3.32)$$

umgeformt.

**3.1.2 Lösungen der freien Dirac-Gleichung**

Wir beginnen mit der Lösung für ein ruhendes Elektron (Fermion). Für  $\mathbf{p} = 0$  wird die Dirac-Gleichung besonders einfach,

$$i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} \psi - m\psi = 0 \quad . \quad (3.33)$$

Durch Einsetzen lässt sich verifizieren, dass die vier linear unabhängigen Funktionen

$$\begin{aligned} \psi_1 &= N N_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} & \psi_2 &= N N_S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \\ \psi_3 &= N N_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} & \psi_4 &= N N_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Lösungen dieser Gleichung sind. Sie bilden eine Basis, aus der jede beliebige Lösung der Dirac-Gleichung für ruhende Elektronen durch Linearkombina-

tion gewonnen werden kann. Die vierdimensionalen Spaltenvektoren heißen *Spinoren*. Die Faktoren  $N$  und  $N_S$  sind Normierungskonstanten, die wir gleich diskutieren werden. Die ersten beiden Lösungen genügen der Eigenwertgleichung

$$\hat{E}\psi_{1,2} = m\psi_{1,2} \quad , \quad (3.35)$$

während die letzten beiden Lösungen

$$\hat{E}\psi_{3,4} = -m\psi_{3,4} \quad (3.36)$$

erfüllen. Es gibt also offenbar zwei Lösungen positiver und zwei Lösungen negativer Energie!

Die zu einem bestimmten Energiewert gehörenden Lösungen lassen sich zwanglos den beiden möglichen Spineinstellungen  $j_3 = \pm 1/2$  entlang der  $z$ -Achse im Ruhesystem des Fermions zuordnen. Die formale Begründung geht davon aus, dass die Matrizen  $\hat{j}_i = \Sigma_i/2$  mit

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

die Vertauschungsrelationen (2.108) erfüllen. Solche Beweise verlangen immer wieder das Umformen von Ausdrücken, die Produkte von  $\gamma$ - und  $\sigma$ -Matrizen enthalten. Die Manipulation dieser Matrizen gewinnt enorm an Anschaulichkeit, wenn sie in einer expliziten Darstellung durchgeführt wird. Dazu eignen sich algebraische Programme hervorragend.<sup>3</sup>

Durch Anwenden der Matrix  $\Sigma_3$  auf die Lösungen  $\psi_i$ , z. B.

$$\Sigma_3\psi_1 = \psi_1 \quad , \quad (3.38)$$

findet man sofort die richtige physikalische Interpretation der  $\psi$ -Funktionen:  $\psi_1$  ist eine Lösung positiver Energie mit  $j_3 = 1/2$ ,  $\psi_2$  eine Lösung positiver Energie mit  $j_3 = -1/2$ ,  $\psi_3$  eine Lösung negativer Energie mit  $j_3 = 1/2$  und  $\psi_4$  eine Lösung negativer Energie mit  $j_3 = -1/2$ . Die für diese kurze Einführung zu umfangreiche Behandlung der Dirac-Gleichung für Elektronen in einem Magnetfeld zeigt, dass das magnetische Moment der Elektronen  $e/2m$ , also ein Bohrsches Magneton, beträgt. Für den sog.  $g$ -Faktor der Fermionen fin-

<sup>3</sup> In dem MAPLE-Paket `heppack.txt` werden u. a. Darstellungen dieser Matrizen und der Dirac-Spinoren zur Verfügung gestellt. Die Lehrbeispiele `dirac1.txt` und `dirac2.txt` sollen die im Text behandelten Beweise und Ableitungen erweitern und vertiefen. Der so wichtige Spinoperator der Dirac-Theorie wird z. B. in `dirac1.mws` diskutiert. Zum Herunterladen der Routinen folgen Sie den Hinweisen auf das Buch auf meiner Homepage <http://mozart.physik.rwth-aachen.de/>

det man daher  $g=2$ . Die Tatsache, dass der Spin der Elektronen mit dem richtigen magnetischen Moment in einer relativistisch korrekten Wellengleichung enthalten ist, wird immer eine der schönsten Entdeckungen der Physik bleiben. Leser, die noch nicht so vertraut mit den Begriffen magnetisches Moment und  $g$ -Faktor sind, finden wieder eine sehr gute Einführung im Buch von J.D. Jackson [Jac98].

Lösungen für Fermionen, die sich mit einem beliebigen Impuls  $\mathbf{p}$  bewegen, findet man aus den ruhenden Lösungen durch Lorentz-Transformation [Bjo90]. Im einzelnen gilt

$$\begin{aligned}\psi_1 &= Nu_1 e^{-ip \cdot x} & \psi_2 &= Nu_2 e^{-ip \cdot x} \\ \psi_3 &= Nv_1 e^{+ip \cdot x} & \psi_4 &= Nv_2 e^{+ip \cdot x} .\end{aligned}\quad (3.39)$$

Hierin wurde wie üblich

$$p \cdot x = p^\mu x_\mu = Et - \mathbf{p}\mathbf{x} \quad (3.40)$$

benutzt.  $E$  ist positiv definit, steht also hier und in den folgenden Formeln als Abkürzung für  $+\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Die Spinoren  $u$  und  $v$  gehören zu den Lösungen positiver bzw. negativer Energie.  $u_1$  beschreibt demnach z. B. ein Elektron positiver Energie und mit dem Impuls  $\mathbf{p}$ , dessen Spin entlang der  $z$ -Achse des Ruhesystems die Komponente  $j_3 = +1/2$  hat;  $v_1$  beschreibt ein Elektron negativer Energie mit dem Impuls  $\mathbf{p}$  und  $j_3 = +1/2$ .

Im Abschn. 1.2.1 haben wir die Diracsche Interpretation der Zustände negativer Energie diskutiert: Das Fehlen eines Elektrons im See negativer Energie ist gleichbedeutend mit der Anwesenheit eines Positrons mit positiver Energie. Es ist jetzt an der Zeit, Feynmans neue Interpretation der Lösungen mit negativer Energie aus Abschn. 1.2.5 wieder aufzugreifen. Sie hat den Vorteil, sich gleichermaßen für Fermionen (Dirac-Gleichung) wie für Bosonen (Klein-Gordon-Gleichung) verwenden zu lassen. Feynman lässt nur Lösungen positiver Energie, die in der Zeit vorwärts laufen  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ , und Lösungen negativer Energie, die in der Zeit rückwärts laufen  $p'^\mu = (-E, -\mathbf{p})$ , zu. Wie üblich gehören die Lösungen positiver Energie zu den Teilchen; die genannten Zustände mit negativer Energie beschreiben jetzt aber Antiteilchen mit dem Viererimpuls  $-p'^\mu$ , d. h. also positiver Energie und einem vorwärts gerichteten Impuls  $+\mathbf{p}$ , wie in der Abb. 3.1 erläutert wird. Die Spinoren  $v$  werden in einer ganz bestimmten Weise den Antiteilchen zugeordnet:  $v_1$  gehört jetzt zu einem Antiteilchen mit Impuls  $\mathbf{p}$  und der Spinkomponente im Ruhesystem  $j_3 = -1/2$ , während  $v_2$  ein Antiteilchen mit Impuls  $\mathbf{p}$  und  $j_3 = +1/2$  beschreibt. (Auch in der Diracschen Interpretation entspricht ein Loch mit der Ladung  $-e$  und Spin abwärts im See negativer Energie einem Teilchen positiver Ladung und positiver Energie mit Spin aufwärts.) Diese Zuordnung kommt anschaulich in der viel benutzten Notation

$$\begin{aligned}
u_1 &= u(p, 1/2) \\
u_2 &= u(p, -1/2) \\
v_1 &= v(p, -1/2) \\
v_2 &= v(p, 1/2)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

zum Ausdruck, wobei das Symbol  $p$  als Kurzform für  $E$  und  $\mathbf{p}$  steht. Die explizite Darstellung der Spinoren wird durch die beiden Formelsätze

$$u_1 = N_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N_S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

und

$$v_1 = N_S \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = N_S \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

festgelegt, in denen die Abkürzung

$$p_{\pm} = p_x \pm ip_y \tag{3.44}$$

mit der interessanten Eigenschaft

$$p_+ p_- = p_x^2 + p_y^2 \tag{3.45}$$

verwendet wurde. Durch Einsetzen (auch z.B. mit Hilfe algebraischer Programme) lässt sich verifizieren, dass diese Spinoren  $u$  und  $v$  die Relationen

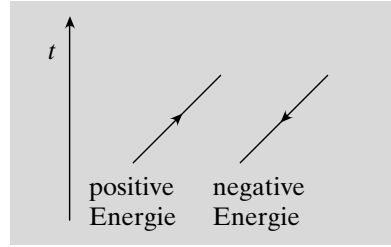
$$(\not{p} - m)u = 0 \tag{3.46}$$

und

$$(\not{p} + m)v = 0 \tag{3.47}$$

erfüllen, wobei wieder die Abkürzung  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$  benutzt wurde. Diese Beziehungen lassen sich als Dirac-Gleichungen im Spinorraum auffassen. Sie können durch Anwendung der Dirac-Gleichung auf die Lösungen (3.39) abgeleitet werden.

Den Spinornormierungsfaktor  $N_S$  wählen wir zu



**Abb. 3.1** Fermion- und Antifermionlinien. Die Pfeile geben die Richtung des Impulses an. Die Zeitachse verläuft von unten nach oben. Wenn der Pfeil nach unten deutet, handelt es sich um ein Fermion negativer Energie, das rückwärts läuft. Dies ist gleichbedeutend mit einem vorwärts laufenden Antifermion positiver Energie

$$N_S = \sqrt{E + m} \quad . \quad (3.48)$$

Aus der in der Dirac-Theorie wichtigen Definition der adjungierten („quergestrichenen“)  $\psi$ -Funktion

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (3.49)$$

folgt für die Spinoren

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma^0 \quad \bar{v} = v^\dagger \gamma^0 \quad (3.50)$$

und daraus mit (3.48) die Normierungsrelationen

$$\bar{u}_i u_j = 2m \delta_{ij} \quad (3.51)$$

bzw.

$$\bar{v}_i v_j = -2m \delta_{ij} \quad . \quad (3.52)$$

Von vielen Autoren, so z. B. im Buch von Bjorken und Drell [Bjo90], wird

$$N_S = \sqrt{(E + m)/2m} \quad (3.53)$$

gewählt. Damit sind die Spinoren „auf 1“ normiert. Die Form (3.48) hat aber den Vorteil, dass die Normierung der Wellenfunktionen für Bosonen und Fermionen identisch wird, was zu den gleichen Faktoren für den Zusammenhang zwischen Matrixelement und Wirkungsquerschnitt führt (siehe dazu

Abschn. 2.1). Der Vierervektor des Teilchenstroms ist ja in der Diracschen Theorie durch

$$j^\mu = \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}, t) \quad (3.54)$$

definiert [Bjo90], und deswegen erhält man für die Teilchendichte (mit  $j^0 = \rho$ )

$$\rho = \psi^\dagger \psi \quad (3.55)$$

und weiter z. B. für die Lösung  $\psi_1$

$$\rho = N^2 u_1^\dagger u_1 = N^2 2E \quad (3.56)$$

Das gleiche Resultat ergibt sich auch für die anderen drei Lösungen. Die Bedingung

$$\int \rho dV = 1 \quad (3.57)$$

lässt sich damit also durch

$$N = \frac{1}{\sqrt{2EV}} \quad (3.58)$$

wie bei den Bosonen erfüllen.

Der Spin des bewegten Elektrons ist natürlich nicht entlang der  $z$ -Richtung quantisiert, sondern entlang einer Richtung  $\mathbf{n}'$ , die aus der  $z$ -Achse des Ruhesystems durch die entsprechende Lorentz-Transformation hervorgeht. Eine Ausnahme liegt vor, falls der Lorentz-*Boost* vom Ruhesystem in das Laborsystem entlang der  $z$ -Achse läuft. In diesem Fall liegen Flugrichtung und Quantisierungsachse des Teilchens auf der  $z$ -Achse des Laborsystems. Die Spinoren beschreiben nun offenbar spezielle Helizitätszustände  $|\mathbf{p}, \lambda = \pm 1/2\rangle$  mit  $\mathbf{p}$  in der  $z$ -Achse. Fermionen und Antifermionen mit der Helizität  $+1/2$  bezeichnen wir als *rechtshändig*, solche mit  $\lambda = -1/2$  als *linkshändig*. Ein Elektron mit  $\lambda = +1/2$  bekommt also das Symbol  $e_R$ . Zur Darstellung der Helizitätszustände im Spinorraum gilt für Teilchen

$$\begin{aligned} u_R &= |\mathbf{p}, \lambda = +1/2\rangle \\ u_L &= |\mathbf{p}, \lambda = -1/2\rangle \end{aligned} \quad (3.59)$$

und für die Antiteilchen

$$\begin{aligned} v_L &= |\mathbf{p}, \lambda = -1/2\rangle \\ v_R &= |\mathbf{p}, \lambda = +1/2\rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.60)$$

An die Stelle der Indizes 1,2 treten nun die Indizes R, L für rechtshändige bzw. linkshändige Teilchen. Zunächst geben wir die explizite Darstellung der Spinoren an, die zu Helizitätszuständen mit Impulsen entlang der  $z$ -Achse gehören. Es gilt offenbar für die Fermionen

$$u_R = N_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_L = N_S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-|\mathbf{p}|}{E+m} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

und für die Antifermionen

$$v_L = N_S \begin{pmatrix} \frac{|\mathbf{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_R = N_S \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-|\mathbf{p}|}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.62)$$

Diese Spinoren werden besonders einfach im Grenzfall  $m/E \rightarrow 0$ , d. h. verschwindender Masse (Neutrinos!) oder sehr hoher Energie der Fermionen,

$$u_R = N_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_L = N_S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

mit  $N_S = \sqrt{E}$ . Der Normierungsfaktor kann also sehr große Werte annehmen. Im gleichen Grenzfall erhält man für die Lösungen der Antifermionen

$$v_L = N_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_R = N_S \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.64)$$

Da die Helizitätszustände außerordentlich angenehm für praktische Rechnungen sind, möchten wir in folgenden Darstellungen für beliebige Quantisierungsrichtungen ableiten. Dazu müssen wir allerdings etwas weiter ausholen.

Mit Hilfe der Pauli-Spinoren

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

lassen sich die Spinoren (3.42) und (3.43) in die kompakte Form

$$u_r = N_S \begin{pmatrix} \chi_r \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E+m} \chi_r \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

und

$$v_r = N_S \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E+m} \chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

bringen. Der Index  $r$  kann naturgemäß die Werte 1,2 annehmen. Zustände mit dem Impuls  $\mathbf{p}$  im Laborsystem und einer beliebigen Quantisierungsachse  $\mathbf{n}$  im Ruhesystem (siehe Abb. 3.2) lassen sich genauso anschreiben, nur muss man dann die Spinoren  $\chi_r$  in (3.66) und (3.67) durch gedrehte Spinoren  $\chi'_r$  ersetzen. Durch die Drehung

$$R = R_z(\phi) R_y(\Theta) \quad (3.68)$$

wird ein beliebiger Vektor aus der  $z$ -Achse eines Koordinatensystems in die Richtung  $\mathbf{n}$  gedreht (Abb. 3.2). Um mit den Phasenkonventionen von Jacob und Wick [Jac59] übereinzustimmen, benutzen wir die zu (3.68) äquivalente Drehung

$$R = R_z(\phi) R_y(\Theta) R_z(-\phi) . \quad (3.69)$$

Die Elemente  $D_{m'm}^{1/2}$  der zugehörigen Matrix  $U(R)$  im Raum der Spinoren haben wir schon in (2.144) ausgerechnet,

$$U(R) = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & -e^{-i\phi} \sin(\Theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} , \quad (3.70)$$

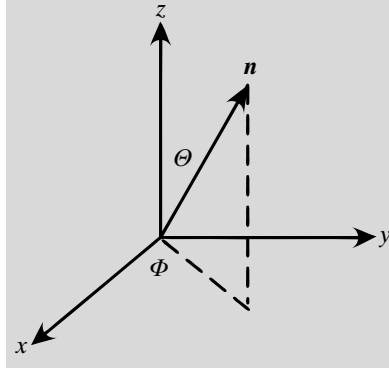
woraus die Darstellung der gedrehten Pauli-Spinoren für „Spin auf“

$$\chi'_1 = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

bzw. für „Spin ab“

$$\chi'_2 = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin(\Theta/2) \\ \cos(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.72)$$





**Abb. 3.2** Die Quantisierungssachse  $\mathbf{n}$  im Ruhesystem eines Teilchens

folgt. Wenn wir jetzt den Lorentz-*Boost* entlang dem Richtungsvektor  $\mathbf{n}$  im Ruhesystem des Teilchens durchführen, erhalten wir Helizitätszustände der Dirac-Theorie für Teilchen bzw. Antiteilchen, die mit dem Impuls  $|\mathbf{p}|$  in der Richtung  $\Theta, \phi$  des Laborsystems laufen. Ihre explizite Darstellung wird durch Einsetzen der gedrehten Pauli-Spinoren in (3.66) und (3.67) abgeleitet, also

$$\begin{aligned} u_R &= u_1 \\ u_L &= u_2 \\ v_L &= v_1 \\ v_R &= v_2 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Im Grenzfall  $m/E \rightarrow 0$  lautet ihre Form für die Fermionen

$$u_R = N_S \begin{pmatrix} \chi'_1 \\ \chi'_1 \end{pmatrix}, \quad u_L = N_S \begin{pmatrix} \chi'_2 \\ -\chi'_2 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

und für die Antifermionen

$$v_L = N_S \begin{pmatrix} \chi'_1 \\ \chi'_1 \end{pmatrix}, \quad v_R = N_S \begin{pmatrix} -\chi'_2 \\ \chi'_2 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Die zuletzt gewonnenen Helizitätszustände von masselosen Teilchen haben eine sehr hübsche Eigenschaft, sie sind nämlich Eigenzustände der Matrix

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (3.76)$$

Dargestellt durch die  $2 \times 2$ -Matrizen 0 und 1 hat diese Matrix die Form

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

unabhängig von der Stellung des Index,  $\gamma^5 = \gamma_5$ . Die Eigenwertgleichungen lauten

$$\gamma^5 u_R = u_R \quad \gamma^5 u_L = -u_L \quad (3.78)$$

bzw.

$$\gamma^5 v_R = -v_R \quad \gamma^5 v_L = v_L. \quad (3.79)$$

Masselose Fermionen bilden also Eigenzustände zum Chiralitätsoperator<sup>4</sup>  $\gamma^5$  mit den Eigenwerten  $\pm 1$ .

Spinoren von massiven Teilchen sind nicht Eigenzustände der Chiralität, aber die Anwendung von  $\gamma^5$  auf diese Spinoren ist ebenfalls interessant. Durch explizite Konstruktion überzeugen wir uns davon, dass  $\gamma^5$  einen Teilchenspinor positiver Helizität in den Spinor eines Antiteilchens negativer Helizität (und umgekehrt) verwandelt, also z. B.

$$\gamma^5 u_R = v_L. \quad (3.80)$$

Anhand von (3.74) und (3.75) kann man diese Identität für masselose Teilchen unmittelbar ablesen.

### Vertiefung

Der Leser sollte sich mit den Eigenschaften der Matrix  $\gamma^5$  vertraut machen. Es gilt offenbar  $(\gamma^5)^2 = 1$ ,  $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$  und

$$\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5. \quad (3.81)$$

Die letzte Relation wird zum Beweis von

$$\overline{\gamma^5 \psi} = -\bar{\psi} \gamma^5 \quad (3.82)$$

benutzt. Hierin ist  $\psi$  eine beliebige Lösung der Dirac-Gleichung.

Aus  $\gamma^5$  lassen sich die Operatoren

<sup>4</sup> Die Bezeichnung geht auf das griechische Wort  $\chi\epsilon\iota\rho$  (cheir) für „Hand“ zurück.

$$\Pi^\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad (3.83)$$

gewinnen. Da die Helizitätszustände (3.74) und (3.75) masseloser Fermionen und Antifermionen Eigenzustände zu  $\gamma^5$  sind, erfüllen sie trivialerweise die Relationen

$$\begin{aligned} \Pi^+ u_R &= u_R & \Pi^+ u_L &= 0 \\ \Pi^- u_L &= u_L & \Pi^- u_R &= 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Pi^- v_R &= v_R & \Pi^- v_L &= 0 \\ \Pi^+ v_L &= v_L & \Pi^+ v_R &= 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Die  $\Pi^\pm$  genügen offenbar den Vollständigkeitsrelationen von Projektionsoperatoren

$$\Pi^+ + \Pi^- = 1 \quad \Pi^\pm \Pi^\mp = 0 \quad \Pi^\pm \Pi^\pm = \Pi^\pm \quad (3.86)$$

und erzeugen daher auch bei Anwendung auf eine *beliebige* Lösung der Dirac-Gleichung Zustände definierter *Chiralität*

$$\Pi^+ \psi = R \quad , \quad \Pi^- \psi = L \quad (3.87)$$

Die chiralen Zustände  $R$  und  $L$  haben die Chiralität  $+1$  bzw.  $-1$ , wie man durch Anwendung von  $\gamma^5$  auf die Definitionsgleichung (3.87) sofort sieht. Auch diese Zustände werden oft als rechtshändig bzw. linkshändig bezeichnet. Im Grenzfall  $m/E \rightarrow 0$  ist die Chiralität eines Teilchens gleich seiner Helizität und die Chiralität eines Antiteilchens gleich dem Negativen seiner Helizität.

Wir sollten noch einen Moment bei diesem Thema verweilen. Wie wir gerade gelernt haben, lässt sich jede Lösung der Dirac-Gleichung gemäß

$$\psi = R + L \quad (3.88)$$

zerlegen. Offenbar sind aber diese einzelnen Zustände *keine* Lösungen der Dirac-Gleichung. Denn mit  $(R, L) = \Pi^\pm \psi$  und (3.81) beweist man sofort

$$i\gamma^\mu \partial_\mu R = mL \quad (3.89)$$

und entsprechend für  $L$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu L = mR . \quad (3.90)$$

Nur im Grenzfall  $m \rightarrow 0$  – oder genauer  $m/E \rightarrow 0$  – erfüllen diese Wellenfunktionen die Dirac-Gleichung

$$i\gamma^\mu \partial_\mu R = 0 \quad i\gamma^\mu \partial_\mu L = 0 . \quad (3.91)$$

Wenn man eine physikalische Theorie hat, in der nur Lösungen der Dirac-Gleichung mit einer bestimmten Chiralität vorkommen, bedeutet dies notwendigerweise, dass die Masse verschwindet und nur ein Helizitätszustand übrig bleibt. Wir haben in Abschn. 2.5 die Paritätsverletzung so interpretiert, dass Neutrinos immer linkshändig und Antineutrinos immer rechtshändig sind. Dies heißt ebenfalls  $m_\nu = 0$ . Auch anschaulich ist es so, dass nur für ein masseloses Teilchen die Aussage, es habe negative Helizität, lorentzinvariant ist. Um ein Neutrino rechtshändig zu sehen, müsste nämlich ein Beobachter sich in einem Bezugssystem befinden, das sich schneller als das Neutrino bewegt. Dies ist aber für  $m_\nu = 0$  nicht möglich.

Jetzt zu den Strömen! Zu einer bestimmten Lösung  $\psi$  der freien Dirac-Gleichung kann man immer einen Vektorstrom

$$j_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (3.92)$$

und einen Axialvektorstrom

$$j_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (3.93)$$

bilden. Die Anwendung der Zerlegung (3.88) ergibt

$$j_V^\mu = \bar{R} \gamma^\mu R + \bar{L} \gamma^\mu L \quad (3.94)$$

und entsprechend für den Axialvektorstrom

$$j_A^\mu = \bar{R} \gamma^\mu \gamma^5 R + \bar{L} \gamma^\mu \gamma^5 L = \bar{R} \gamma^\mu R - \bar{L} \gamma^\mu L . \quad (3.95)$$

Diese Ströme verknüpfen nur Lösungsanteile gleicher Chiralität miteinander, da die Terme mit unterschiedlicher Chiralität verschwinden, z. B.

$$\bar{R} \gamma^\mu L = 0 . \quad (3.96)$$

### Beweis

Wir benutzen die Identität

$$\bar{R}\gamma^\mu L = \bar{\Pi}^+ \bar{\psi} \gamma^\mu \Pi^- \psi . \quad (3.97)$$

Mit Hilfe von (3.81) und (3.82) lässt sich die rechte Seite zu  $\bar{\psi} \gamma^\mu \Pi^+ \Pi^- \psi$  umformen und verschwindet daher aufgrund der Orthogonalität der Projektionsoperatoren.

Die diskutierten Ströme sind invariant gegen die Ersetzung von  $\psi$  durch

$$\psi' = \gamma^5 \psi . \quad (3.98)$$

Man spricht von einer *chiralen* Invarianz der Ströme. Der Beweis erfolgt einfach durch Einsetzen unter Benutzung von (3.81). Wenn wir jetzt für  $\psi$  Teilchenspinoren einer bestimmten Helizität einsetzen, wird dadurch eine Symmetrie zwischen rechtshändigen Teilchen und linkshändigen Antiteilchen (und umgekehrt) für Theorien etabliert, in denen die Dichte der Wechselwirkungsenergie (der Hamilton-Operator) aus Produkten dieser Ströme mit Feldern besteht.

Anstelle der Vektor- und Axialvektorströme arbeitet man häufig direkt mit den sog. linkshändigen und rechtshändigen Strömen  $\bar{L}\gamma^\mu L$  und  $\bar{R}\gamma^\mu R$ . Aus den Definitionsgleichungen (3.94) und (3.95) folgt sofort die Umrechnung

$$j_L^\mu = \frac{1}{2}(j_V^\mu - j_A^\mu) \quad (3.99)$$

$$j_R^\mu = \frac{1}{2}(j_V^\mu + j_A^\mu) . \quad (3.100)$$

Neben den Strömen ist auch noch die Norm  $\bar{\psi}\psi$  interessant. Sie verknüpft nur Lösungsanteile unterschiedlicher Chiralität miteinander,

$$\bar{\psi}\psi = \bar{R}L + \bar{L}R . \quad (3.101)$$

Die Norm ist offenbar nicht chiral-invariant, sondern es gilt

$$\bar{\psi}'\psi' = -\bar{\psi}\psi \quad (3.102)$$

und daher treten in einer chiral-invarianten Theorie Produkte wie  $\bar{\psi}\psi$  nicht auf. Da in der Energiedichte Massenterme die Gestalt  $m\bar{\psi}\psi$  haben, kann eine chiral invariante Theorie nur für masselose Fermionen formuliert werden.

### Vertiefung

Als Paritätsoperator  $P$  der Diracschen Theorie können wir  $\gamma^0$  identifizieren. Man kann leicht überprüfen, dass die Anwendung dieses Operators mit den in Abschn. 2.5.1 getroffenen Definitionen übereinstimmt. Zunächst einmal belegt die Anwendung des Operators auf die Zustände ruhender Fermionen in (3.34) die innere Parität  $\eta = 1$  für Teilchen und  $\eta = -1$  für Antiteilchen. Die Anwendung auf den Helizitätszustand  $u_R$  ergibt

$$\gamma^0 N_S \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\Theta/2) \\ a \cos(\Theta/2) \\ ae^{i\phi} \sin(\Theta/2) \end{pmatrix} = N_S \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\Theta/2) \\ -a \cos(\Theta/2) \\ -ae^{i\phi} \sin(\Theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

mit  $a = |\mathbf{p}|/(E + m)$ . Die rechte Seite ist aber bis auf einen Phasenfaktor identisch mit dem Spinor  $u_L(-\mathbf{p})$ , wenn man beachtet, dass die Paritätstransformation in Polarkoordinaten in der Ersetzung  $\Theta \rightarrow \pi - \Theta$  und  $\phi \rightarrow \pi + \phi$  besteht. Das in (2.316) festgelegte Verhalten wird also im Spinorraum korrekt wiedergegeben.

Der paritätstransformierte Vektorstrom hat die Form  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi$ . Durch Anwendung der Vertauschungsrelationen der  $\gamma$ -Matrizen sieht man unmittelbar, dass  $j^0$  sich nicht ändert, während die räumlichen Komponenten  $j^i$  gespiegelt werden. Das umgekehrte Verhalten findet man für den Axialvektorstrom.

Nun noch ein paar Überlegungen zur Stromerhaltung. Auch für den Vektorstrom (3.92) gilt der klassische Erhaltungssatz der Elektrodynamik

$$\partial_\mu j_V^\mu(x) = 0, \quad (3.104)$$

dessen räumliches Integral mit der Ladungserhaltung identifiziert werden kann. (Das Argument  $x$  steht als Abkürzung für die vier Komponenten des Vektors  $x^\mu$ .) Der Beweis der Stromerhaltung gelingt sehr schnell unter der Voraussetzung, dass  $\psi$  eine Lösung der freien Dirac-Gleichung ist. Außerdem muss man noch beachten, dass die Dirac-Gleichung für adjungierte Spinoren

$$\bar{\psi}(i \not{\partial} + m) = 0 \quad (3.105)$$

lautet, wobei die Differentiation nach links wirkt. Die Stromerhaltung bleibt auch gültig, wenn  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  ebene Wellen zu unterschiedlichen Impulsen  $p$  und  $p'$  bilden. In der Sprache der Feldtheorie ist dann  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  das Übergangsma-

trixelement des Vektorstromoperators. Wenn wir nun einen Vektorstrom aus Spinoren  $\psi_1, \psi_2$  bilden, die zu Teilchen verschiedener Masse gehören, geht (3.104) in

$$\partial_\mu j_V^\mu = i(m_1 - m_2)\bar{\psi}_1\psi_2 \quad (3.106)$$

über. Der Vektorstrom ist also nur erhalten, wenn beide Teilchen die gleiche Masse haben. Umgekehrt folgt für die Divergenz des Axialvektorstroms sofort

$$\partial_\mu j_A^\mu = i(m_1 + m_2)\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2 \quad (3.107)$$

Für diesen Strom kann ein Erhaltungssatz demnach nur im Grenzfall verschwindender Massen formuliert werden. Die zusätzliche Matrix  $\gamma^5$  in (3.93) hat offenbar dramatische Konsequenzen.