

Die Streumatrix und ihre Symmetrien

Christoph Berger

Einführung

Mit Hilfe des Konzepts der Streumatrix S lassen sich Reaktionen der Quantenmechanik in sehr allgemeiner Form beschreiben. Wenn man eine Theorie zur Berechnung der Matrixelemente zur Hand hat, interessiert besonders der Zusammenhang zwischen diesen Matrixelementen und den physikalischen Observablen wie dem Wirkungsquerschnitt und der Zerfallsrate. Damit wollen wir uns zunächst beschäftigen. Unabhängig von einer spezifischen Theorie muss die S -Matrix aber gewissen Symmetriebedingungen genügen, die allein ausreichen, die Form des Wirkungsquerschnitts festzulegen. Das bekannteste Beispiel ist der Zusammenhang zwischen Teilchenspins und Winkelverteilung. Daher wird im Anschluss an die Formeln für Wirkungsquerschnitte und Zerfallsraten das Symmetriekonzept vorgestellt. Die anschließenden Abschnitte behandeln die Symmetrien der Streumatrix und die daraus folgenden experimentellen Konsequenzen.

2.1 Die Streumatrix

Die Idee der Streumatrix führen wir ganz pragmatisch am Beispiel eines Streuexperimentes zwischen zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen (Abb. 2.1) ein. Am besten halten wir uns immer das Beispiel der πp -Streuung vor Augen. Das Pion-Nukleon-System vor der Streuung beschreiben wir durch den quantenmechanischen Zustandsvektor $|i\rangle$. In $|i\rangle$ ($i = \text{initial}$)

C. Berger, Prof. Dr.

I. Physikalisches Institut, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland. E-mail: berger@rwth-aachen.de

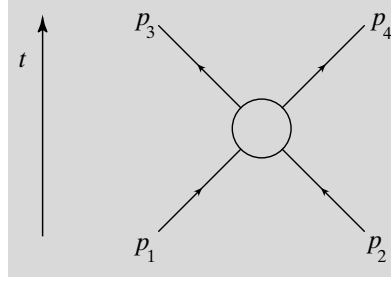


Abb. 2.1 Allgemeines Diagramm einer Zwei-Körper-Streureaktion $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Als Beispiel wird in diesem Abschnitt die Pion-Proton-Streuung betrachtet, $\pi + p \rightarrow \pi + p$

sind also alle Quantenzahlen des Systems zur Zeit $t \rightarrow -\infty$ enthalten. Zur Zeit $t \rightarrow +\infty$ sei das System im Zustand $|i'\rangle$. Der Übergang wird durch den Streuoperator S beschrieben:

$$|i'\rangle = S |i\rangle \quad . \quad (2.1)$$

Der Detektor präpariert aus allen möglichen in $|i'\rangle$ enthaltenen Zuständen einen bestimmten Endzustand $|f\rangle$ ($f = final$) heraus. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, $|f\rangle$ in $|i'\rangle$ zu finden, ist durch das Skalarprodukt

$$\langle f | i' \rangle = \langle f | S | i \rangle = S_{fi} \quad , \quad (2.2)$$

also durch die Matrixelemente des S -Operators, gegeben.

In $|i'\rangle$ sind natürlich auch die ohne Wechselwirkung durchlaufenden Zustände enthalten, wir können daher einen Reaktionsoperator R über

$$S = 1 + R \quad (2.3)$$

eingeführen. Auf diese Weise wird S in zwei Anteile zerlegt, von denen nur einer (R) den einlaufenden Zustand $|i\rangle$ ändert. Gemäß einer häufig benutzten Konvention definieren wir die Übergangsamplitude oder Streuamplitude T_{fi} durch Abspalten weiterer Faktoren von $R_{fi} = \langle f | R | i \rangle$. Diese Amplitude enthält die gesamte Dynamik des Prozesses. Falls man eine Theorie der betrachteten Reaktion hat, erlauben die zu den Feynman-Graphen gehörenden Rechenvorschriften die Berechnung von T_{fi} . Der Zusammenhang mit R_{fi} ist durch

$$R_{fi} = -i(2\pi)^4 N_1 N_2 N_3 N_4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) T_{fi} \quad (2.4)$$

festgelegt. Hierin sind p_n die Viererimpulse der beteiligten Teilchen ($n = 1, 2, 3, 4$) und N_n die Normierungsfaktoren ihrer Wellenfunktionen.

Das Symbol δ^4 bezeichnet das Produkt von vier Diracschen δ -Funktionen mit jeweils einer Komponente der Viererimpulse als Argument. Damit wird explizit die Energie-Impuls-Erhaltung im Prozess zum Ausdruck gebracht. Dies wird klar, wenn man sich nochmal an die Eigenschaften dieser Funktion erinnert. Für den interessierten Leser enthält der Anhang zu diesem Abschnitt eine Zusammenstellung der wichtigsten Definitionen und Rechenregeln.

2.1.1 Wirkungsquerschnitte und Streuamplitude

Zur weiteren theoretischen Behandlung unseres Streuexperimentes stellen wir uns einen Kasten mit dem Volumen V , der Länge Δz und dem Querschnitt A vor. In seiner Mitte liege das Target-Proton, und während des Zeitintervalls T trete ein Pion in den Kasten ein. Es handelt sich bei diesem Kasten um das *target* der Abb. 1.18, aber mit nur noch einem Proton als Inhalt. Das zugehörige Reaktionsdiagramm ist in Abb. 2.1 angegeben. Die abgeleiteten Formeln gelten zunächst für alle Reaktionen mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen, also z. B. für die elastische Streuung (1.112) und die inelastische Reaktion (1.118). Angaben von Winkeln und Impulskomponenten beziehen sich auf ein Koordinatensystem, dessen z -Achse in Richtung des einlaufenden Pions liegt. Zur einfacheren Handhabung sehen wir zunächst vom Spin des Protons ab und behandeln alle Teilchen als Bosonen.

In unserem Gedankenexperiment ist $n_0 = 1/V$. Das einlaufende Pion habe die Geschwindigkeit $|\mathbf{v}_1|$. Da im Zeitintervall T ein Pion im Kasten sein soll, ist $N_{\text{in}} = T|\mathbf{v}_1|/\Delta z$ und daher lässt sich (1.123) in

$$d\sigma = \frac{V dN_f}{T|\mathbf{v}_1|} \quad (2.5)$$

umformen. Jetzt muss dN_f berechnet werden. In der hier betrachteten Konfiguration mit jeweils einem Pion und einem Proton ist dN_f gleich der Wahrscheinlichkeit für die Streuung des Pions. Zu ihrer Berechnung benutzen wir die „goldene Regel“ der Quantenmechanik für den Übergang in ein Intervall von dicht beieinander liegenden Endzuständen:

$$dN_f = |R_{fi}|^2 \cdot (\text{Zahl der Endzustände}) . \quad (2.6)$$

Ein Teilchen in einem Kasten mit dem Volumen V und mit Impulsen zwischen \mathbf{p} und $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ kann

$$dZ = \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (2.7)$$

Zustände einnehmen, da man nach Fermi das Volumen des Phasenraumes (also $V d^3 p$) in Zellen der Größe $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ aufteilen muss. Eine genauere Begründung dieser Abzählung findet sich in den Lehrbüchern der Quantenmechanik oder Kernphysik, z. B. in [Bet07]. Für die untersuchte Streureaktion gelangen wir so zu

$$dN_f = |R_{fi}|^2 \frac{V d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p_4}{(2\pi)^3} . \quad (2.8)$$

Ein Vergleich mit (2.4) zeigt, dass in $|R_{fi}|^2$ das Quadrat einer δ -Funktion enthalten ist. Das sieht nun wirklich gefährlich aus, aber mit Hilfe der im Anhang zu diesem Abschnitt abgeleiteten Formeln (2.79) und (2.80) lässt sich in *einer* Dimension

$$[\delta(\omega)]^2 = \delta(\omega)\delta(0) \quad (2.9)$$

ausnutzen.¹ Jetzt wird noch $\delta(0)$ durch (2.82) ersetzt. In der Verallgemeinerung auf vier Dimensionen gilt daher die Beziehung

$$(\delta^4)^2 = \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta^4 , \quad (2.10)$$

womit schließlich die wichtige Beziehung

$$|R_{fi}|^2 = VT(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) (N_1 N_2 N_3 N_4)^2 |T_{fi}|^2 \quad (2.11)$$

zwischen $|R_{fi}|$ und $|T_{fi}|$ festgelegt wird.

Von der nichtrelativistischen Quantenmechanik sind wir gewohnt, für die Normierungskonstanten N_n ebener Wellen in einem Kasten $1/\sqrt{V}$ anzusetzen. In der relativistischen Quantenmechanik wird aber die Schrödinger-Gleichung für freie Bosonen durch

$$(\Delta - m^2)\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

¹ Was bedeutet das Quadrat einer Funktion, die überall verschwindet, aber an einer Stelle unendlich groß wird?

ersetzt. Diese sog. Klein-Gordon-Gleichung entspricht der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung (1.42).² Sie ist auch in der Ableitung nach der Zeit von zweiter Ordnung, und daher muss der nichtrelativistische Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsdichte durch

$$\rho = i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) \quad (2.13)$$

ersetzt werden, wobei das Symbol „*“ wie üblich „konjugiert komplex“ bedeutet. Die Lösung für ebene Wellen lautet

$$\psi = N e^{-ip \cdot x} \quad (2.14)$$

mit dem aus dem Energie-Impuls-Vektor p^μ und dem Ortsvektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

gebildeten Skalarprodukt

$$p \cdot x = Et - \mathbf{p} \mathbf{x} . \quad (2.16)$$

Für die Normierungskonstanten leiten wir aus dieser Lösung (wegen $\int \rho dV = 1$) sofort

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{2E_n V}} \quad (2.17)$$

ab, die wir später auch für Fermionen benutzen werden. Wir bekommen damit für den Wirkungsquerschnitt das Ergebnis

$$d\sigma = \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1|} |T_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{2E_3 (2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4 (2\pi)^3} . \quad (2.18)$$

Bei der Auswertung in einem System mit ruhenden Target-Teilchen erhalten wir

² Benannt nach dem Schweden Oskar Benjamin Klein (1894–1977) und dem Deutschen Walter Gordon (1893–1939), die diese Gleichung unabhängig voneinander fanden. Auch W. Gordon gehört zu den vielen bedeutenden Forschern, die in der Nazizeit emigrierten.

$$4E_1E_2|\mathbf{v}_1| = 4|\mathbf{p}_1|m_2 \quad . \quad (2.19)$$

In einer vom Bezugssystem unabhängigen (d.h. relativistisch invarianten) Form lässt sich der letzte Ausdruck mit Hilfe der in (1.49) definierten Größe S_{12} ebenfalls einfach angeben:

$$4E_1E_2|\mathbf{v}_1| = 2S_{12} \quad , \quad (2.20)$$

da ja die Auswertung von S_{12} im Ruhesystem des Teilchens 2 den Wert $2m_2|\mathbf{p}_1|$ ergibt. Die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt lautet daher schließlich

$$d\sigma = \frac{1}{2S_{12}} |T_{fi}|^2 dL \quad , \quad (2.21)$$

worin das sog. lorentz-invariante Phasenraumelement dL durch

$$dL = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \quad (2.22)$$

definiert ist. Der Beweis der Lorentz-Invarianz von d^3p/E , d.h. der Unabhängigkeit von der Wahl des Bezugssystem, wird in Abschn. ?? nachgeholt.

Mit (2.21) ist ein wichtiger Zwischenschritt in einer relativistisch korrekten Behandlung des Wirkungsquerschnitts erreicht. Er wird durch diese Formel in drei explizit lorentz-invariante Anteile zerlegt: den Flussfaktor der einlaufenden Teilchen, das Quadrat des Matrixelements und das Intervall des zur Verfügung stehenden Phasenraumes. Um weiter zu kommen, müssen wir jetzt dL über nicht benötigte Variablen integrieren. Am einfachsten geht das im *Schwerpunktssystem* der Reaktion. Über den Rückstoßimpuls des auslaufenden Protons kann mit Hilfe der δ -Funktion sofort integriert werden. Damit wird aus (2.22)

$$\int dL = d\Omega_3 \int \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{|\mathbf{p}_3|^2 d|\mathbf{p}_3|}{E_3 E_4} \quad , \quad (2.23)$$

worin $d\Omega_3$ das Raumwinkelement des auslaufenden Pions bedeutet.³ Jetzt können wir noch über den Impulsbetrag des Pions integrieren, der ja auch durch die übrigbleibende δ -Funktion festgelegt ist. Dies ist insofern nicht ganz einfach, als diese δ -Funktion nur implizit vom Pionimpuls abhängt. Unter Heranziehung der Regel

³ Eine kleine Nachlässigkeit in der Bezeichnungsweise sei hier erlaubt: Das Integralzeichen auf der linken Seite der Gleichung verlangt nur die Integration über nicht mehr benötigte Variable.

$$\int \delta[f(\omega)]g(\omega)d\omega = \left(g\left|\frac{df}{d\omega}\right|^{-1}\right)_{f=0}, \quad (2.24)$$

die durch Wechsel der Integrationsvariablen, $\omega \rightarrow f$, bewiesen wird, lässt sich jedoch mit $f = E_1 + E_2 - E_3 - E_4$ also

$$f = \sqrt{s} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_3^2} - \sqrt{\mathbf{p}_3^2 + m_4^2} \quad (2.25)$$

die Relation

$$\left|\frac{df}{d|\mathbf{p}_3|}\right|_{f=0} = \frac{|\mathbf{p}_3|\sqrt{s}}{E_3 E_4} \quad (2.26)$$

ableiten. Mit $f=0$ wird der Energiesatz erfüllt. Mit (2.24) und (2.26) wird (2.23) in

$$\int dL = d\Omega_3 \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_3|}{\sqrt{s}} \quad (2.27)$$

umgeformt. Dieses Ergebnis hat eine klare anschauliche Bedeutung, die wir sofort sehen, wenn wir $|\mathbf{p}_3|$ aus den Massen der auslaufenden Teilchen berechnen (siehe Kasten in Abschn. 1.3),

$$|\mathbf{p}_3| = \frac{S_{34}}{2\sqrt{s}}. \quad (2.28)$$

Ganz unabhängig von einer möglichen Massenabhängigkeit des Matrixelementes ist die Produktionswahrscheinlichkeit von Teilchen mit hoher Masse vom Phasenraum her unterdrückt, da $|\mathbf{p}_3|$ Werte zwischen 0 (für $m_3 + m_4 = \sqrt{s}$) und $\sqrt{s}/2$ (bei verschwindenden Massen der auslaufenden Teilchen) annehmen kann.

Wenn wir auch S_{12} in (2.21) durch $|\mathbf{p}_1|$ ausdrücken, lautet die endgültige Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} |T_{fi}|^2, \quad (2.29)$$

woraus für die elastische Streuung einfach

$$\frac{d\sigma^{\text{el}}}{d\Omega_3} = \frac{1}{64\pi^2 s} |T_{fi}|^2 \quad (2.30)$$

folgt. Das Quadrat des Viererimpuls-Übertrags $q^2 = t$ ist durch $t = (p_1 - p_3)^2$ definiert (1.15). Mit Hilfe von

$$dt = 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|d\cos\Theta_3, \quad (2.31)$$

worin Θ_3 den Winkel zwischen den ein- und auslaufenden Pionen bezeichnet, formen wir (2.29) und (2.30) in die viel benutzte Beziehung

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s_{12}^2} |T_{fi}|^2 \quad (2.32)$$

um.⁴ In dieser Formel treten nur noch explizit invariante Größen auf.

Zur Ableitung von (2.32) wurde über den Azimutwinkel ϕ_3 integriert. Dies ist erlaubt, da wegen der Drehimpulserhaltung die Impulse der Reaktionspartner eine Ebene aufspannen, und das Matrixelement nicht von der Orientierung dieser Ebene abhängen darf. Jetzt soll aber nicht der allgemeinen Diskussion von Symmetrien vorgegriffen werden. Der neugierige Leser findet eine andere Begründung für die erlaubten Argumente von T_{fi} in Abschn. ??.

Schließlich diskutieren wir die Erweiterung der Formeln auf Fermionen und andere Teilchen mit Spin. Die „magnetischen“ Spinquantenzahlen der ein- und auslaufenden Teilchen bezeichnen wir mit $j_{(n),z}$ oder $j_{(n),3}$. Sie bilden im Gegensatz zu den Energien und Impulsen einen Satz von diskreten Quantenzahlen. Die z - oder 3-Achse im Ruhesystem der Teilchen dient hier als Quantisierungsachse. Für jede erlaubte Kombination dieser Zahlen müssen wir T_{fi} berechnen, die Indizes i und f beziehen sich jetzt also auch auf die Spineinstellungen der Reaktionsteilchen.

Wir werden, wie schon gesagt, später die Normierungsfaktoren der Fermionwellenfunktionen so wählen, dass (2.29) auch für Fermionen einer gegebenen Orientierung der Spins den Zusammenhang zwischen Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt wiedergibt. Eine sehr häufig vorkommende experimentelle Anordnung ist nun, dass die einlaufenden Teilchen unpolarisiert sind, und die Spineinstellungen der auslaufenden Teilchen nicht gemessen werden. Nach den Regeln der Quantenmechanik wird dann der Wirkungsquerschnitt durch Mittelung über die einlaufenden und Summation über die auslaufenden Spins berechnet,

⁴ Eine von den meisten Physikern gemiedene pedantische Genauigkeit in der Behandlung der Vorzeichen verlangt die Anschrift $d\sigma/d|t|$ auf der linken Seite der Gleichung, da $d\Omega$ durch $\sin\Theta d\Theta d\phi$ definiert ist.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_3} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{p}_3|}{|\mathbf{p}_1|} \sum \overline{|T_{fi}|^2} . \quad (2.33)$$

Die Mittelung kann durch ein statistisches Gewicht g in

$$\sum \overline{|T_{fi}|^2} = g \sum_{j(n),z} |T_{fi}|^2 \quad (2.34)$$

berücksichtigt werden. Die Summe auf der rechten Seite läuft über alle kombinatorischen Möglichkeiten der Spineinstellungen der Reaktionspartner. Das Gewicht g berechnet man durch Abzählen der möglichen Spinkombinationen der *einlaufenden* Teilchen und anschließende Inversion, also $g=1/2$ für die Pion-Nukleon-Streuung und $g=1/4$ für die besonders häufig vorkommenden $e^- e^+$ - und $p p$ -Reaktionen, aber auch für die Streuung von Photonen an Photonen.

Beim nochmaligen Durchlesen der Ableitung der Formeln zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts aus der Streuamplitude wird der Leser feststellen, dass eine Erweiterung auf mehr als zwei Teilchen im Endzustand leicht möglich ist. Sie besteht für jedes zusätzliche Teilchen einfach im Hinzufügen weiterer Faktoren $d^3 p_i / (2\pi)^3 2 E_i$ an das Phasenraumelement (2.22). Die Berechnung des Integrals über den Phasenraum kann je nach der funktionalen Abhängigkeit des Matrixelementes allerdings ziemlich kompliziert werden, ein besonders einfaches Beispiel werden wir gleich im nächsten Abschnitt untersuchen.

2.1.2 Zerfallsraten

Zunächst betrachten wir die sog. Zwei-Körper-Zerfälle, also z. B. den Zerfall $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Der Energie-Impuls-Satz lautet

$$P = p_1 + p_2 . \quad (2.35)$$

Das Differential der Zerfallsbreite wird aus (1.133) unter Verwendung von $dN = -N_f$ berechnet,

$$d\Gamma = \frac{dN_f}{VT n_0} . \quad (2.36)$$

Für $|R_{fi}|^2$ gilt jetzt entsprechend (2.11)

$$|R_{fi}|^2 = VT(2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2)(N_P N_1 N_2)^2 |T_{fi}|^2 . \quad (2.37)$$

Bei der Auswertung von (2.36) im Ruhesystem eines Zerfallsteilchens der Masse M leitet man mit $n_0 = 1/V$ und

$$(P^\mu) = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

über⁵

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |T_{fi}|^2 \int dL \quad (2.39)$$

die Formel

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_1} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_1|}{M^2} |T_{fi}|^2 \quad (2.40)$$

ab, worin natürlich $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$, der Impuls eines der auslaufenden Teilchen im Ruhesystem des Zerfallsteilchens, wieder aus (1.48) berechnet wird. Falls das zerfallende Teilchen keinen Spin hat oder falls man nur den Zerfall unpolarisierter Teilchen mit Spin J betrachtet, ist keine Achse im Ruhesystem ausgezeichnet, und $d\Gamma$ kann daher nicht von einem Winkel abhängen. Wir dürfen deshalb die Integration über $d\Omega$ sofort ausführen und erhalten als allgemeines Ergebnis

$$\Gamma = \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi M^2} \overline{\sum} |T_{fi}|^2 . \quad (2.41)$$

Das zur Ausführung der rechten Seite benötigte statistische Gewicht für ein zerfallendes Teilchen mit dem Spin J ist klarerweise durch

$$g = \frac{1}{2J+1} \quad (2.42)$$

definiert.

Bei der Untersuchung der Strahlungszerfälle von Hadronen ($H^* \rightarrow H + \gamma$) ist es manchmal einfacher, analog zu dem Vorgehen der Atomphysik und Kernphysik eine nichtrelativistische Rechnung (Index NR) durchzuführen. Unter Verwendung einer nichtrelativistischen Normierung der Hadronwellenfunktionen (Normierungskonstante $1/\sqrt{V}$) bekommen wir bei Vernachlässigung des Energieunterschiedes zwischen ein- und auslaufendem Hadron

⁵ Das Integralzeichen bezeichnet wieder nur die Integration über nicht benötigte Variablen.

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_1} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{8\pi^2} |T_{fi}^{\text{NR}}|^2 . \quad (2.43)$$

Besonders wichtig sind auch die Drei-Körper-Zerfälle, man denke nur an das klassische Beispiel des β -Zerfalls. Der Energie-Impuls-Satz lautet nun

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \quad (2.44)$$

und für das Phasenraumelement in (2.39) gilt

$$dL = (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} . \quad (2.45)$$

Wir bleiben im Ruhesystem des Mutterteilchens. Die Integration über \mathbf{p}_3 ist wieder sofort möglich, und die verbleibende δ -Funktion $\delta(M - E_1 - E_2 - E_3)$ erlaubt im Prinzip noch eine weitere Integration ohne Beachtung der Argumente des Matricelementes. Nach Summierung bzw. Mittelung über die Spins der aus- und einlaufenden Teilchen kann die Summe der Quadrate dieser Matricelemente nur von den Impulskomponenten der Teilchen im Endzustand abhängen. Wie viele unabhängige Komponenten gibt es? Um diese Frage zu beantworten, bedenken wir, dass die Impulse der auslaufenden Teilchen in einer Ebene liegen. Wir haben noch die Freiheit, das Koordinatensystem so zu legen, dass z. B. die x -Achse mit einem der Impulse zusammenfällt. Dann stehen noch fünf Komponenten (nämlich drei Impulsbeträge und zwei relative Winkel) zur Verfügung, die aber durch drei Erhaltungssätze der Energie und des Impulses miteinander verknüpft sind. Wir wählen als unabhängige Komponenten die Energien E_1, E_2 und ziehen die zugehörigen Differentiale vor das Integral. Das Ergebnis lautet daher zunächst

$$\int dL = dE_1 dE_2 \frac{|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|}{8(2\pi)^5} \int \delta(M - E_1 - E_2 - E_3) \frac{1}{E_3} d\Omega_1 d\Omega_2 , \quad (2.46)$$

wobei noch

$$d|\mathbf{p}| = \frac{E}{|\mathbf{p}|} dE \quad (2.47)$$

benutzt wurde. Wir legen nun den Impuls \mathbf{p}_1 in die z -Achse eines räumlichen Koordinatensystems und integrieren über alle möglichen Orientierungen der z -Achse, d. h. über $d\Omega_1$ und anschließend über den Azimutwinkel des zweiten Teilchens. Insgesamt ergibt dies einen Faktor $8\pi^2$. Die verbleibende Integration über $d\cos\Theta_2$ ist nicht so einfach, weil die δ -Funktion nur implizit von Θ_2 abhängt. Um E_3 als Funktion von $\cos\Theta_2$ zu berechnen, ziehen wir den Impulssatz $\sum \mathbf{p}_n = 0$ heran und erhalten

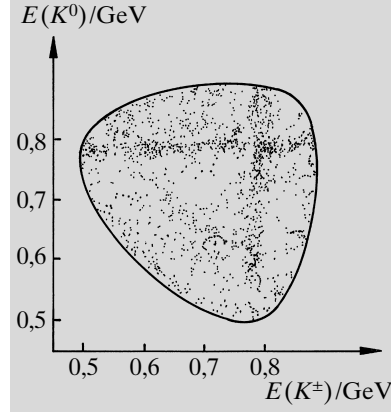


Abb. 2.2 Beispiel für eine Dalitz-Auftragung. Untersucht wurde die Reaktion $p + \bar{p} \rightarrow K^{(-)0} + K^\mp + \pi^\pm$. Die erhöhte Punktdichte beweist die Bildung von Kaon-Resonanzen

$$\mathbf{p}_3^2 = \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|\cos\Theta_2 \quad . \quad (2.48)$$

Damit liegt auch E_3 fest und wir können jetzt mit Formel (2.24) weiterarbeiten, deren Anwendung das Endergebnis

$$\int dL = \frac{1}{32\pi^3} dE_1 dE_2 \quad (2.49)$$

für den Drei-Teilchen-Phasenraum liefert. Mit der oben beschriebenen Summation und Mittelung über die Spins erhalten wir somit das bemerkenswerte Resultat

$$\frac{d^2\Gamma(E_1, E_2)}{dE_1 dE_2} = \frac{1}{64\pi^3 M} \overline{\sum |T_{fi}(E_1, E_2)|^2} \quad . \quad (2.50)$$

Jedes Zerfallsereignis lässt sich als Punkt in der E_1, E_2 -Ebene darstellen. Die Punktdichte in dieser Ebene ist offenbar ein direktes Maß für das Betragsquadrat des Matrixelements. Diese Auftragung nach Dalitz oder *Dalitz-Plot*-Methode hat sich als enorm nützlich in der Untersuchung der Drei-Körper-Zerfälle erwiesen. Die Abb. 2.2 demonstriert, wie die höhere Punktdichte an bestimmten Stellen direkt die Bildung neuer Resonanzen anzeigt.

Im Fall verschwindender Masse der Teilchen im Endzustand sind die Grenzen des Dalitz-Plots einfach durch das Dreieck der Abb. 2.3 gegeben, i. allg. ist aber die Berechnung der Grenzen ziemlich kompliziert. Man erhält sie durch Auswertung der Bedingung

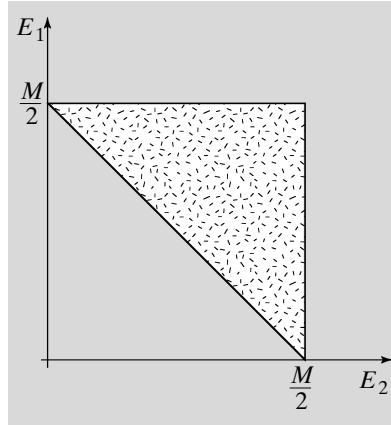


Abb. 2.3 Grenzen des Dalitz-Plots für den Drei-Körper-Zerfall in masselose Teilchen

$$|\cos \Theta_2| \leq 1 \quad , \quad (2.51)$$

wobei $\cos \Theta_2$ sich aus (2.48) ermitteln lässt. Zur Bestimmung dieser Grenzen sind numerische Methoden besonders geeignet, ein Beispiel ist in dem Programm `dalitz.txt` auf der Web-Seite angegeben, dessen Parameter der Leser nach eigenem Belieben verändern sollte.

2.1.3 Symmetrien der S -Matrix

Die Erforschung von Symmetrien in den Naturgesetzen ist einer der schönsten Zweige der Physik. Die Symmetrien führen uns zu Erhaltungssätzen und Aussagen über die Struktur der Streuamplitude, deren Gültigkeit nicht an ein bestimmtes Modell einer Wechselwirkung geknüpft ist. In der Teilchenphysik liefert das S -Matrix-Konzept einen besonders einfachen Zugang zu diesen Überlegungen. Historisch spielten sie eine besonders wichtige Rolle in der Zeit vor der Etablierung des Standardmodells. Da heute Feynman-Regeln für alle Wechselwirkungen bekannt sind, treten Betrachtungen über die Symmetrien der Streumatrix naturgemäß in den Hintergrund. Der Leser kann daher im Prinzip die folgenden Abschnitte zunächst übergehen. Das Symmetriekonzept der Quantenmechanik wird in den entsprechenden Lehrbüchern ausführlich diskutiert [Gre05, Mes90]. Wem die folgende Zusammenfassung zu schnell geht, sollte diese Bücher konsultieren.

Die S -Matrix (bzw. der S -Operator) ist unitär, d. h. es gilt

$$SS^\dagger = S^\dagger S = 1 \quad (2.52)$$

oder

$$S^{-1} = S^\dagger \quad (2.53)$$

Die Matrixelemente des adjungierten Operators S^\dagger sind hierbei wie üblich durch

$$S_{fi}^* = S_{if}^\dagger \quad (2.54)$$

definiert. Für das System zur Zeit $t \rightarrow -\infty$ und das System zur Zeit $t \rightarrow +\infty$ gilt damit der Zusammenhang

$$\langle i' | i' \rangle = \langle i | S^\dagger S | i \rangle = \langle i | i \rangle \quad (2.55)$$

Physikalisch bedeutet die Unitarität der S -Matrix die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit im Streuprozess: „Was hinein läuft, muss auch wieder herauskommen“.

Im Hilbertraum der Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ betrachten wir nun die Wirkung einer beliebigen unitären Transformation U , wobei die transformierten Zustände mit dem „ \sim “-Symbol bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} U |i\rangle &= |\tilde{i}\rangle, \\ U |f\rangle &= |\tilde{f}\rangle. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Der S -Operator transformiert sich unter U gemäß der allgemeinen Transformationsregel für Operatoren

$$\tilde{S} = U S U^\dagger, \quad (2.57)$$

und daher gilt trivialerweise

$$\langle \tilde{f} | \tilde{S} | \tilde{i} \rangle = \langle f | U^\dagger U S U^\dagger U | i \rangle = \langle f | S | i \rangle \quad (2.58)$$

Uns interessieren besonders die Fälle, bei denen S invariant unter U ist, also $\tilde{S} = S$, was die Bedingung

$$U S U^\dagger = S \quad (2.59)$$

ergibt. Nach Multiplikation dieser Gleichung mit U jeweils von rechts und anschließender Subtraktion der linken von der rechten Seite folgt hieraus wegen $U^\dagger U = 1$

$$SU - US = 0 \quad , \quad (2.60)$$

was mit

$$[S, U] = 0 \quad (2.61)$$

abgekürzt wird. Um die Bedeutung dieses Resultats zu verstehen, untersuchen wir infinitesimale Transformationen. Eine infinitesimale unitäre Transformation lässt sich als Abweichung von der Einheitsmatrix 1 schreiben,

$$U = 1 - i d\alpha F \quad , \quad (2.62)$$

wobei (2.62) den einfachsten Fall mit *einem* reellen Parameter $d\alpha$ und *einem* sog. Generator F der unitären Transformation U darstellt. Kompliziertere Beispiele werden wir später kennenlernen, aber das Wesentliche sieht man schon bei der Beschränkung auf (2.62). Beim Sammeln der in $d\alpha$ linearen Terme gilt nämlich

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= (1 + i d\alpha F^\dagger)(1 - i d\alpha F) \\ &\approx 1 + i d\alpha (F^\dagger - F) \end{aligned} \quad (2.63)$$

und daher

$$F^\dagger = F \quad . \quad (2.64)$$

Das heißt, die Generatoren F sind Hermitesche Operatoren. Solche Operatoren repräsentieren bekanntlich die messbaren Größen in der Quantenmechanik. Aus (2.61) folgt dann mit (2.62) sofort

$$[S, F] = 0 \quad , \quad (2.65)$$

und dies ist ein höchst wichtiges Resultat. Es bedeutet, dass die Eigenwerte von F im Streuprozess erhalten bleiben, d.h. es gibt einen Erhaltungssatz für die durch die Operatoren F repräsentierten Messgrößen.

Am einfachsten sehen wir das an einem Beispiel ein. Es sei F die z -Komponente des Gesamtimpulses der Reaktionspartner, $F = P_z$, mit den Eigenwerten $P_{i,z}$ und $P_{f,z}$ im Anfangs- bzw. Endzustand der Reaktion. Dann gilt

$$\langle f | [S, P_z] | i \rangle = (P_{i,z} - P_{f,z}) S_{fi} \quad (2.66)$$

und wegen (2.65)

$$P_{f,z} = P_{i,z} \quad . \quad (2.67)$$

Wir haben also gezeigt, dass die Impulserhaltung identisch zu einer Symmetrie der S -Matrix unter der Transformation

$$U = 1 - i\alpha P_z \quad (2.68)$$

ist. Jetzt wollen wir die physikalische Bedeutung dieser Transformation noch etwas näher untersuchen.⁶ Wir werden zeigen, dass U die durch eine Verschiebung des Koordinatensystems induzierte Transformation ist. Ein Teilchen mit der Ortskoordinate z wird durch einen Zustandsvektor $|z\rangle$ beschrieben. In $|i\rangle$ sind natürlich auch die Ortskoordinaten aller Teilchen enthalten, $|i\rangle = |\dots, z_1, z_2, \dots\rangle$, wofür wir vereinfachend $|z\rangle$ schreiben. Wenn wir nun unsere Apparatur um ein Stück Δz verschieben, wird der Zustandsvektor zu $|z + \Delta z\rangle$ mit der Verknüpfung

$$|z + \Delta z\rangle = U_z(\Delta z) |z\rangle \quad . \quad (2.69)$$

Wegen (2.62) gilt für den Generator F_z der Verschiebung

$$F_z |z\rangle = \frac{-i}{\Delta z} (|z + \Delta z\rangle - |z\rangle) \quad . \quad (2.70)$$

Hierbei haben wir $d\alpha = -\Delta z$ gesetzt. Im Grenzfall $\Delta z \rightarrow 0$ folgt

$$F_z |z\rangle = -i \frac{d}{dz} |z\rangle \quad , \quad (2.71)$$

also

$$F_z = P_z \quad , \quad (2.72)$$

wobei die Operatorbeziehung

⁶ Immer wieder lesenswert in diesem Zusammenhang ist Diracs Buch über Quantenmechanik [Dir81].

$$P_z = -i \frac{d}{dz} \quad (2.73)$$

schon aus der elementaren Quantenmechanik geläufig ist.

Mit den einfachen Mitteln des S -Matrix-Formalismus haben wir so das berühmte Noethersche Theorem der Feldtheorie gefunden: Einer Symmetrie der Wechselwirkung entspricht ein Erhaltungssatz physikalischer Observablen.⁷ Beispielsweise folgt die Impulserhaltung aus der Invarianz der Theorie gegenüber räumlichen Verschiebungen, Energieerhaltung aus der Invarianz gegenüber zeitlichen Verschiebungen, Drehimpulserhaltung aus der Invarianz unter Drehungen. Die Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ geben wir als Eigenzustände zu den erhaltenen Operatoren an. Das Studium der Symmetrien zeigt uns daher auch einen geeigneten Satz von Quantenzahlen der Elementarteilchen. Mit diesen Quantenzahlen und den Methoden ihrer experimentellen Bestimmung werden wir uns daher noch eine Weile beschäftigen.

2.1.4 Das optische Theorem

Wir haben im letzten Abschnitt die Unitarität als Erhaltung der Wahrscheinlichkeit im Streuprozess interpretiert. Mathematisch lässt sich allein aus der Unitaritätsbedingung eine fundamentale Beziehung zwischen dem Imaginärteil der Streuamplitude und ihrem Betrag begründen. Zur Herleitung im Fall einer beliebigen 2-Körperreaktion folgern wir zunächst aus $SS^\dagger = 1$

$$RR^\dagger = -2ReR = -2(2\pi)^4 N_1 N_2 N_3 N_4 \delta^4 ImT \quad , \quad (2.74)$$

worin Re und Im für Realteil bzw. Imaginärteil stehen. Nun schieben wir die Vollständigkeitsrelation $\sum_f |f\rangle\langle f| = 1$ zwischen R und R^\dagger auf der linken Seite und multiplizieren die gesamte Gleichung von links mit $\langle i|$ und von rechts mit $|i\rangle$. Das Ergebnis lautet

$$\sum_f |R_{fi}|^2 = -2(2\pi^4) N_1^2 N_2^2 \delta^4 ImT_{fi}^{el}(0) \quad . \quad (2.75)$$

Auf der rechten Seite wurde hierbei noch $T_{ii} = T_{fi}^{el}(0)$ benutzt, T_{ii} ist also durch die *elastische* Streuamplitude in Vorwärtsrichtung ($\Theta=0$) gegeben. Dies entspricht anschaulich dem Grenzübergang $|f\rangle \rightarrow |i\rangle$. Außerdem gilt in diesem Fall $N_1 = N_3$ und $N_2 = N_4$. Die formale Summe über f auf der linken Seite muss im Fall der kontinuierlich verteilten Impulse durch das Integral $\int \frac{V d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p_4}{(2\pi)^3}$ ersetzt werden. Unter Benutzung von (2.4) und der Definition (2.22) ergibt dies

⁷ Amalie Emmy Noether (1882–1935) gilt als die bisher bedeutendste deutsche Mathematikerin. Sie emigrierte 1933 in die USA.

$$\sum_k \int |T_{fi}|^2 dL = -2 \operatorname{Im} T_{fi}^{el}(0) , \quad (2.76)$$

wobei die Summe auf der linken Seite über die verschiedenen möglichen Reaktionskanäle k , also auch über die möglichen Werte des Spins der Endzustände läuft. Das Integral erstreckt sich hier über den gesamten Bereich der Impulse \mathbf{p}_3 und \mathbf{p}_4 . Durch Vergleich mit (2.21) lernen wir daher, dass $\sum_k \int |T_{fi}|^2 dL$ bis auf einen Faktor $2 S_{12}$ der totale Wirkungsquerschnitt σ_t für eine bestimmte Konfiguration der Spins der einlaufenden Teilchen ist,

$$\sigma_t = \frac{-1}{S_{12}} \operatorname{Im} T_{fi}^{el}(0) . \quad (2.77)$$

Damit ist das optische Theorem formuliert. Ihm werden wir noch an verschiedenen Stellen des Buches begegnen. Aus der Art der Herleitung wird klar, dass es auch für Endzustände mit beliebig vielen Teilchen gültig ist. Immer ist der totale Wirkungsquerschnitt durch die elastische Streuamplitude der zwei einlaufenden Teilchen in Vorwärtsrichtung gegeben, wobei *elastisch* auch bedeutet, dass die Spineinstellungen der Teilchen erhalten bleiben.

Die Namensgebung des Theorems erinnert daran, dass in der Optik die Abschwächung der Intensität einer Welle in Materie durch den Imaginärteil des Brechungsindex beschrieben wird. In dem Lehrbuch *Collision Theory* von Goldberger und Watson [Gol64] aber auch in dem schon häufig erwähnten Buch von Jackson [Jac98] findet man eine ausführliche und tief gehende Diskussion dieses für die Streutheorie eminent wichtigen Zusammenhangs.

2.1.5 Anhang über die δ -Funktion

Die von Dirac gefundene δ -Funktion hat sich als besonders hilfreich beim Rechnen mit den ebenen Wellen der Quantenmechanik erwiesen. In *einer* Dimension (z. B. der Kreisfrequenz ω) ist die δ -Funktion durch folgende Eigenschaften festgelegt: Falls ω_0 außerhalb des Integrationsintervalls liegt, gilt

$$\int \delta(\omega - \omega_0) d\omega = 0 . \quad (2.78)$$

Hingegen gilt, falls ω_0 innerhalb des Integrationsintervalls liegt,⁸

⁸ Diese beiden Eigenschaften charakterisieren die δ -Funktion noch nicht eindeutig. Auch hier sei wieder ein Blick in das Buch von J.D. Jackson und die dort genannten mathematischen Lehrbücher empfohlen [Jac98].

$$\int \delta(\omega - \omega_0) d\omega = 1 \quad . \quad (2.79)$$

Man kann sich $\delta(\omega - \omega_0)$ als eine Funktion vorstellen, die überall verschwindet, außer bei ω_0 , wo sie unendlich groß wird. Der damit arg strapazierte Funktionsbegriff zeigt den lockeren Umgang der Physiker mit unendlichen Größen, aber in der mathematischen Distributionstheorie wird gezeigt, dass sich mit solchen Distributionen wie mit gewöhnlichen Funktionen rechnen lässt. Eine elementare Zusammenfassung findet man in [Ber80]. Aus den angegebenen Eigenschaften folgt sofort die sehr wichtige Wirkung der δ -Funktion auf gewöhnliche Funktionen $g(\omega)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) g(\omega) d\omega = g(\omega_0) \quad . \quad (2.80)$$

Für sehr große Werte eines Parameters T mit der Dimension der Zeit kann man die δ -Funktion durch

$$\varphi(\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\pi \omega} \quad (2.81)$$

annähern. Dies sollte sich der Leser am besten durch numerische Konstruktion klarmachen. Die Abb. 2.4 zeigt ein Beispiel für $T = 20$ s. Aus der letzten Gleichung lässt sich durch Betrachtung des Grenzübergangs $\omega \rightarrow 0$ die für die Manipulation von Formeln mit Potenzen der δ -Funktion nützliche Beziehung

$$2\pi\delta(0) = T \quad (2.82)$$

ableiten. Da $\varphi(\omega)$ andererseits die Lösung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\omega t} dt \quad (2.83)$$

ist, ergibt sich daraus

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt \quad (2.84)$$

als Integraldarstellung der δ -Funktion.

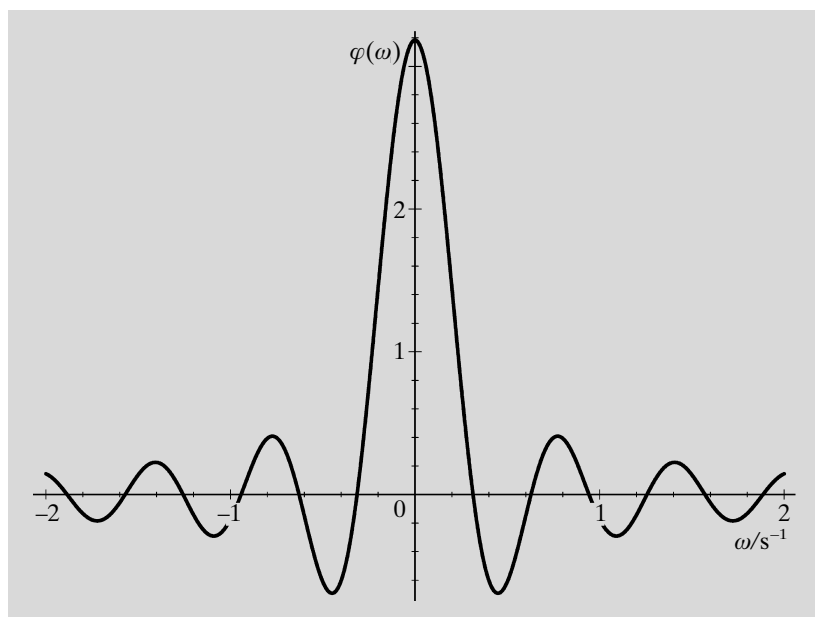


Abb. 2.4 Die Funktion $\sin(\omega T/2)/\pi \omega$ stellt für $T = 20$ s offenbar schon eine recht gute Annäherung an die δ -Funktion dar