8 Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben

Christoph Berger

Vorbemerkung: Immer wenn es sich empfiehlt, die Aufgaben mit einem algebraischen Programm zu lösen, wird auf die Web-Seite des Buches verwiesen, die über meine Homepage `http://mozart.physik.rwth-aachen.de` erreicht werden kann. Dort sind die entsprechenden MAPLE-Routinen und ihre Ergebnisse zu finden.

8.1 Kapitel 1

1.1 Es gilt wie immer $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, $T = E - m$ und $\beta = |\boldsymbol{p}|/E$. Daraus lassen sich die gesuchten Werte berechnen. Eine Graphik befindet sich im Web.

1.2 Zur graphischen Lösung konsultieren Sie bitte das Web.

1.3 Im Einheitensystem der Teilchenphysik wird aus der Dimension der Gravitationskonstanten (Länge^3 Zeit^{-2} Masse^{-1}) die Dimension (Energie)$^{-2}$. $G/(c^5\,\hbar)$ hat diese Dimension auch im SI-System und ist im Einheitensystem der Teilchenphysik mit G identisch. Im SI-System gilt $1/\sqrt{G/(c^5\hbar)} = 1{,}221 \cdot 10^{19}\,\text{GeV}$.

1.4 Wir vernachlässigen den Spin der Teilchen. Dann gilt für den Bahndrehimpuls $L = Er = \sqrt{2}$, wegen $J = 1$. Daraus folgt $r = \sqrt{2}/E$. Das Reaktionsvolumen ist eine Kugel mit dem Radius r, also gilt für die Energiedichte $\rho_E \approx E^4/10$.

1.5 Mit den Ergebnissen der letzten Aufgabe folgt $t_0 = 1{,}75 \cdot 10^{-9}\,\text{s}$.

1.6 Es gilt

C. Berger, Prof. Dr.
I. Physikalisches Institut, RWTH Aachen, 52056 Aachen, Deutschland. E-mail: berger@rwth-aachen.de

$$s = 2(M^2 + E_1 E_2 + |\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_2|) \ .$$

Aus $E_1 = 968\,\mathrm{MeV}$ und $E_2 = 1138\,\mathrm{MeV}$ folgt $\sqrt{s} = 2066\,\mathrm{MeV}$.

1.7 Mit Hilfe von (1.48) folgt $|\boldsymbol{p}| = 0{,}23\,\mathrm{GeV}$.

1.8 Die Hauptzerfallskanäle sind $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ und $\pi^+ \to e^+ \nu_e$. Es sind aber auch Zerfälle mit einer zusätzlichen Abstrahlung von Photonen bzw. $e^+ e^-$-Paaren erlaubt.

1.9 Mit $P = p_1 + p_2$ gilt im Schwerpunktsystem offenbar

$$E_1 = \frac{P \cdot p_1}{\sqrt{s}} \ .$$

Wenn man jetzt noch

$$2p_1 \cdot p_2 = (p_1 + p_2)^2 - m_1^2 - m_2^2$$

benutzt, lässt sich (1.49) relativ schnell ableiten.

1.10 Die Anwendung von (1.109) ergibt mit $m_f = m_\rho$ und $m = 0$ eine Zeitdauer von $2{,}2 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{s}$.

1.11 Wir setzen als Basisreaktion die Streuung $\nu_e\, p \to e^-\, n$ an. Der Wirkungsquerschnitt beträgt nach (1.60) etwa $10^{-43}\,\mathrm{cm}^2$. Mit n_{Fe} aus (1.114) folgt $n_p = Z\, n_{\mathrm{Fe}}$ und daher $\lambda = 4{,}5 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$. Für Pionen der angegebenen Energie ergibt sich aus Abb. 2.14 $\sigma \approx 10^{-25}\,\mathrm{cm}^2$. Daraus berechnet man $\lambda \approx 2\,\mathrm{cm}$, wenn als Dichte der Streuzentren $A\, n_{\mathrm{Fe}}$ genommen wird. Dieser Ansatz einer Streuung an einzelnen Nukleonen ist aber gewagt, da die Reichweite eines Pions in Kernmaterie nur etwa 1 fm beträgt. Diese Zahl ergibt sich, wenn man den Kern als eine Kugel mit dem Radius $r_0\, A^{1/3}$ und $r_0 = 1{,}3\,\mathrm{fm}$ betrachtet.

1.12 In (1.126) setzen wir $\dot{N}_{\mathrm{in}} = n_1 f_p$ und $n_0 = n_2/(A\, \Delta z)$ ein.

1.13 Das Integral des Bhabha-Querschnitts ist $\sigma \approx 1{,}9 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{cm}^2$. Also gilt $L = 2{,}6 \cdot 10^{30}\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$. Der integrierte Wirkungsquerschnitt der Paarerzeugung ist demgegenüber völlig vernachlässigbar, $\sigma \approx 5 \cdot 10^{-38}\,\mathrm{cm}^2$.

1.14 Es gilt

$$x_f = \boldsymbol{M}_{11} x_0 + \boldsymbol{M}_{12} x_0' \ ,$$

wobei die Matrixelemente aus dem Produkt eines fokussierenden Quadrupols (1.157) und einer freien Wegstrecke (1.159) berechnet werden. Damit folgt

$$\boldsymbol{M}_{11} = \cos \Omega - l\sqrt{k} \ ,$$

also $l = 1{,}47\,\mathrm{m}$. Der Rest der Aufgabe ist wieder ein gutes Beispiel für die Anwendung der Computeralgebra. Bitte konsultieren Sie das Web.

8.2 Kapitel 2

2.1 Mit $a'_i = R_{ik}a_k$ und $b'_i = R_{il}b_l$ folgt $a'_i b'_i = R_{ik}R_{il}a_k b_l = a_k b_k$. Im letzten Schritt wurde die Orthogonalitätsrelation (2.88) benutzt.

2.2 Zur Berechnung von (2.123) muss $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma_2\Theta}$ berechnet werden. Dazu wird (2.142) mit dem Ergebnis

$$d^{1/2} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta/2) & -\sin(\Theta/2) \\ \sin(\Theta/2) & \cos(\Theta/2) \end{pmatrix}$$

benutzt.

2.3 Es gilt $\hat{j}_+ = \hat{j}_{(1),+} + \hat{j}_{(2),+}$. Dieser Operator wird auf die rechte Seite von (2.153) angewendet. Die Indizes (1) und (2) beziehen sich auf den jeweils ersten bzw. zweiten Faktor eines Produkts von Zuständen.

2.4 Zur Berechnung der Zerfallswinkelverteilung eines ρ-Mesons mit „Spin auf" muss $J = 1$, $J_3 = 1$, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ in (2.222) eingesetzt werden. Sie ist also durch

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\Omega} \sim \frac{1}{2}\sin^2\Theta |t_{00}|^2$$

gegeben. Der Rest der Aufgabe wird ebenso bearbeitet.

2.5 Die Formel (2.267) verkürzt sich auf ein Glied mit $J = 1$. Legen Sie eine entsprechende Tabelle an.

2.6 Es bleiben nur die Amplituden $f_{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}}$ und $f_{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\,\frac{1}{2}}$ (und ihre Partner mit gespiegelter Helizität) übrig. Die zugehörigen Funktionen d^1 sind proportional zu $(1 + \cos\Theta)$ und $(1 - \cos\Theta)$. Die Winkelverteilung des Wirkungsquerschnitts ist also proportional zu $(1 + \cos^2\Theta)$.

2.7 Aus (2.281) folgt

$$|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2}(|{+}{+}\rangle - |{-}{-}\rangle + \mathrm{i}\,|{+}{-}\rangle + \mathrm{i}\,|{-}{+}\rangle) \ .$$

Damit gilt

$$\langle{+}{-}|\, T \,|\uparrow\uparrow\rangle \sim \left(f_{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}} + f_{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\,\frac{1}{2}} \right) \ ,$$

woraus

$$|T|^2 \sim 1 + \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cos(2\phi)$$

berechnet wird.

2.8 Wegen $\sigma = \int |f|^2 \mathrm{d}\Omega$ gilt mit $|t|_{\max} = 1$ für jede beitragende Helizitätsamplitude

$$\sigma_{\max} = \frac{12\pi}{\boldsymbol{p}^2} \quad .$$

Hierbei wurde noch (2.124) benutzt.

2.9 Eine solche Kurvendiskussion geht am einfachsten mit dem Computer. Ein Beispiel findet sich im Web.

2.10 Auch hier sollten Sie Ihr Ergebnis mit der Lösung im Web vergleichen.

2.11 Der Beweis gelingt sofort mit

$$\int \frac{1}{x^2 + b^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x}{b}\right) \quad .$$

2.12 ϵ^0 wird durch die Drehung nicht geändert. Die Drehmatrix der räumlichen Komponenten ist durch

$$R_z(\phi) R_y(\Theta) = \begin{pmatrix} \cos\Theta\cos\phi & -\sin\phi & \sin\Theta\cos\phi \\ \cos\Theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\Theta\sin\phi \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit wird (2.295) bewiesen.

2.13 Die Summe der Abstände zu den drei Seiten ist für jeden Punkt innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks gleich der Höhe des Dreiecks. Dies entspricht dem Energiesatz $T_1 + T_2 + T_3 = Q$. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem in den Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Dann gilt $y = T_1 - Q/3$ und $x = (T_2 - T_3)/\sqrt{3}$ und daher

$$x^2 + y^2 = \frac{Q^2}{9} + T_1^2 + \frac{1}{3}(T_2^2 + T_3^2 - 2T_2T_3 - 2T_1Q) \quad .$$

In der Klammer ersetzen wir Q durch $T_1 + T_2 + T_3$ und erhalten

$$x^2 + y^2 = \frac{Q^2}{9} + \frac{1}{3}\left[(T_1 + T_2 + T_3)^2 - 4T_1T_2\right] \quad .$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet aber auf der Begrenzungslinie, wie man aus (2.48) für $\cos\Theta_2 = 1$ sofort abliest. Damit gilt also $x^2 + y^2 = Q^2/9$, das ist ein Kreis mit dem Radius $Q/3$.

2.14 Aus (2.267) folgt

$$\begin{aligned} &f_{-\lambda_3-\lambda_4,-\lambda_1-\lambda_2}(\Theta,\phi) \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\sum_J (2J+1) t^J_{-\lambda_3-\lambda_4,-\lambda_1-\lambda_2}(\sqrt{s}) d^J_{-\lambda-\mu}(\Theta) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda-\mu)\phi} \quad . \end{aligned}$$

Mit (2.317) gilt dann wegen der Paritätserhaltung

$$t^J_{-\lambda_3-\lambda_4,-\lambda_1-\lambda_2} = \eta_g t^J_{\lambda_3\lambda_4,\lambda_1\lambda_2}$$

mit

$$\eta_g = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4(-1)^{2J-j_{(1)}-j_{(2)}-j_{(3)}-j_{(4)}} \quad .$$

Da $m = J - j_{(1)} - j_{(2)}$ immer ganzzahlig ist, benutzen wir $(-1)^m = (-1)^{-m}$ zur Herleitung von

$$\eta_g = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4(-1)^{j_{(1)}+j_{(2)}-j_{(3)}-j_{(4)}} \quad .$$

Mit Hilfe von (2.125) und (2.126) wird der Beweis von (2.318) vervollständigt.

2.15 Mit den üblichen Verfahren der linearen Algebra wird

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

mit $\gamma = \sqrt{B/C}$ ermittelt.

2.16 Es handelt sich hier im Prinzip um eine Kurvendiskussion von (2.431). Das mühsame Integral zur Bestimmung des Mittelwertes der Kurve lässt sich mit dem Computer sehr einfach lösen. Bitte konsultieren Sie das Web.

2.17 Unitarität und Unimodularität sind fünf Bedingungsgleichungen für die vier komplexen Elemente der Matrix. Damit beweist man sehr rasch

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

mit $a\,a^* + b\,b^* = 1$.

2.18 Mit Hilfe der Tabelle 2.3 leiten wir u. a.

$$
\begin{aligned}
\left|\pi^+ p\right\rangle &= \left|\tfrac{3}{2};\tfrac{3}{2}\right\rangle \\
\left|\pi^0 p\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{3}{2};\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\tfrac{1}{2};\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
\left|\pi^0 n\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{3}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\tfrac{1}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle \\
\left|\pi^- p\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left|\tfrac{3}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2};\tfrac{-1}{2}\right\rangle
\end{aligned}
$$

ab. Da nur die Amplitude $T_{3/2}$ beitragen soll, gilt

$$
\begin{aligned}
\left\langle\pi^+ p\right| T \left|\pi^+ p\right\rangle &= a \\
\left\langle\pi^- p\right| T \left|\pi^- p\right\rangle &= \frac{a}{3} \\
\left\langle\pi^0 n\right| T \left|\pi^- p\right\rangle &= \frac{\sqrt{2}a}{3} \\
\left\langle\pi^0 n\right| T \left|\pi^0 n\right\rangle &= \frac{2a}{3}
\end{aligned}
$$

und deshalb z. B. $\sigma(\pi^+\, p)/\sigma(\pi^-\, p) = 3$ (Abb. 2.14).

2.19 Natürlich ist J_3 durch

$$
J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

gegeben. Wegen $J_+|1;-1\rangle = \sqrt{2}|1;0\rangle$ und $J_+|1;0\rangle = \sqrt{2}|1;1\rangle$ gilt

$$
J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .
$$

Ganz analog wird

$$
J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

abgeleitet. Mit $J_\pm = J_x \pm \mathrm{i} J_y$ folgt

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$J_y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

2.20 Wir ergänzen (2.531) durch

$$\begin{aligned} \langle \pi^+\pi^- | \, T \, |K_1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}(T_2 - T_2^*) + \sqrt{\frac{2}{3}}(T_0 - T_0^*) \\ \langle \pi^0\pi^0 | \, T \, |K_1\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}(T_2 - T_2^*) - \sqrt{\frac{1}{3}}(T_0 - T_0^*) \quad . \end{aligned}$$

Die im Text angegebenen Festlegungen über T_2 und T_0 führen dann unmittelbar zu (2.532).

2.21 Unter Benutzung der Definitionen (2.468) und (2.469) muss nur der Zusammenhang von ϵ mit q/p aus Abschn. 2.7.4 benutzt werden.

8.3 Kapitel 3

3.1 Im Web finden Sie ein Programmpaket, mit dessen Hilfe sich Ausdrücke mit γ-Matrizen leicht behandeln lassen.

3.2 Siehe Aufgabe 3.1.

3.3 Wegen $\gamma_5^2 = 1$ gilt $(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 0$ und $(1+\gamma_5)(1+\gamma_5) = 2(1+\gamma_5)$ usw.

3.4 (3.137) genügt der Differentialgleichung

$$q^2 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}q^2} = \frac{\alpha^2}{3\pi} \quad .$$

3.5 Die Auswertung von (3.232) ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim \frac{1+\cos^2\Theta}{1-\cos^2\Theta} \quad .$$

Wenn die Masse des Elektrons nicht vernachlässigt werden soll, muss man (3.233) auswerten. Dies ergibt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim \frac{1+\beta^2\cos^2\Theta}{1-\beta^2\cos^2\Theta} + 2K + 2K^2 \ ,$$

worin β die Geschwindigkeit des Elektrons ist und K aus

$$K = \frac{m^2}{E\omega(1-\beta^2\cos^2\Theta)}$$

berechnet wird. E und ω bezeichnen die Energien von Elektron und Photon. Für $\beta \to 0$ wird die Winkelverteilung also isotrop.

3.6 Mit $\lambda = 630$ nm ($\omega = 2$ eV) ergibt die Auswertung von (3.229) $\omega' = 75{,}5$ GeV.

3.7 Wir wählen ein Atommodell mit einem elastisch gebundenen Elektron der Eigenfrequenz ω_0, was unter dem Einfluss einer elektromagnetischen Welle der Frequenz ω und der Amplitude E_0 zu schwingen beginnt. Die abgestrahlte Leistung ist im SI-System durch

$$\bar{P} = \frac{1}{12\pi\epsilon_0 c^3}\omega^4 p_0^2$$

bestimmt, worin das elektrische Dipolmoment p_0 bei Vernachlässigung der Dämpfung durch

$$p_0 = \frac{e^2 E_0}{m(\omega^2-\omega_0^2)}$$

gegeben ist. Der Wirkungsquerschnitt ist durch $\sigma = \bar{P}/I$ definiert. Nach Einsetzen der Intensität $I = c\,\epsilon_0\,E_0^2/2$ folgt im Einheitensystem der Teilchenphysik

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2} \ .$$

Diese Formel enthält die beiden Grenzfälle der Thomson-Streuung ($\omega_0 \approx 0$) und der Rayleigh-Streuung ($\omega_0 \gg \omega$).

3.8 Die Lebensdauer berechnet sich aus der freien Weglänge zu $\tau = 1/(c\,\sigma\,n_\gamma)$. Für σ setzen wir den Thomson-Querschnitt ein. Für die spektrale Verteilung der Anzahldichte der Photonen gilt

$$\frac{\mathrm{d}n_\gamma}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega}\frac{1}{\hbar\omega} \ ,$$

worin der erste Faktor auf der rechten Seite die spektrale Energiedichte der Planckschen Formel ist. Nach Integration erhalten wir n_γ mit dem numerischen Ergebnis $n_\gamma = 20{,}2\ T^3\,\mathrm{cm}^{-3}\mathrm{K}^{-3}$. Dies ergibt eine Lebensdauer von 25,5 h.

8.4 Kapitel 4

4.1 Ein Beispiel für die Verwendung von MAPLE findet sich im Web.

4.2 Mit $q^1 = p$ und $q^2 = n$ sieht man sofort, dass (4.30) die Zustände (2.495) und (2.496) erzeugt. Ebenso erzeugt (4.22) bis auf eine Phase die Zustände (2.503) und (2.504).

4.3 Wir gehen von (4.20) aus. Für kleine Θ gilt mit $\theta = \Theta/2$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\theta & 0 \\ -\mathrm{i}\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $U^{-1} = U^*$ daher

$$T_1'^1 = T_1^1 + \mathrm{i}\theta T_1^2 - \mathrm{i}\theta(T_1^2 + \mathrm{i}\theta T_2^2) \ .$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $T_2'^2$ und $T_3'^3$. Bei Vernachlässigung quadratischer Terme in θ folgt dann $T_i'^i = T_i^i$.

4.4 Als Alternative zu den Verfahren im Text des Buches benutzen wir eine Methode, die aus der Atomphysik bekannt ist. Mit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ gilt für den Erwartungswert des Wechselwirkungsterms $c_\mathrm{F} = \langle \boldsymbol{F}_1\, \boldsymbol{F}_1 \rangle$

$$\langle \boldsymbol{F}_1 \boldsymbol{F}_1 \rangle = \frac{1}{2}\left(f^2 - \frac{8}{3}\right)$$

mit f^2 aus (4.13), wobei schon $f^2 = 4/3$ für Triplett und Antitriplett benutzt wurde. Damit folgt $c_\mathrm{F} = 1/6$ im Oktett.

4.5 Die Wellenfunktion des Σ^+ erhalten wir aus (4.93), indem wir das d-Quark durch ein s-Quark ersetzen. Damit folgt

$$\mu_{\Sigma^+} = \frac{e}{2m_u}\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{9}\frac{m_u}{m_s}\right) \ .$$

Das vorhergesagte magnetische Moment ist also etwas kleiner (2,7 μ_K) als das magnetische Moment des Protons (2,79 μ_K). Gemessen wurden 2,5 μ_K.

4.6 Aus der Wellenfunktion des *flavor*-Singuletts folgt

$$\langle \eta_1 | \, M \, | \eta_1 \rangle = \frac{1}{3}(2m_u + 2m_d + 2m_s) \ .$$

Im additiven Quarkmodell ist diese Masse identisch mit $(2\,M_K + M_\pi)/3$.

4.7 Aus der vierten Zeile der Tabelle 4.4 lesen wir – unter Ersetzung der Farben durch die Quarksorten –

$$|\Lambda\rangle = \frac{1}{2}(|usd\rangle - |uds\rangle + |dsu\rangle - |dus\rangle)$$

ab.

4.8 Das ist eine Aufgabe zum Probieren. $m_{u,\,d} = 360\,\mathrm{MeV}$, $m_s = 510\,\mathrm{MeV}$, $b' = 3{,}8 \cdot 10^7\,\mathrm{MeV}^2$ und $b = 2 \cdot 10^7\,\mathrm{MeV}^2$ gibt gute Resultate für das Baryonen-Oktett und -Dekuplett sowie die ρ, ω- und Φ-Mesonen, aber schlechte Werte für die K- und K^*-Mesonen.

4.9 Für das Φ-Meson erhalten wir $|R_S(0)| = 0{,}24\,\mathrm{GeV}^{3/2}$. Die Auswertung von J/ψ und Υ zeigt dass $|R_S(0)|^2/M_V^2$ sich nur um wenige Prozent ändert.

4.10 Zunächst stellt man die (4.192) entsprechenden Formeln für die η- und η'-Mesonen unter Berücksichtigung eines Mischungswinkels auf. Als Zerfallskonstante wird immer f_π eingesetzt. Um vom Mischungswinkel unabhängig zu werden, wird dann

$$\frac{\Gamma_{\gamma\gamma}^{\eta'}}{m_{\eta'}^3} = \frac{3\Gamma_{\gamma\gamma}^{\pi^0}}{m_{\pi^0}^3} - \frac{\Gamma_{\gamma\gamma}^{\eta}}{m_\eta^3}$$

bewiesen. So kann z. B. $\Gamma_{\gamma\gamma}^{\eta'}$ berechnet werden. Die Auswertung zeigt, dass die Vorhersage ($\Gamma_{\gamma\gamma}^{\eta'} = 5{,}7\,\mathrm{keV}$) nur zu ca. 30 % erfüllt wird .

4.11 Die Integration über (2.277) ergibt keinen Unterschied in den Formeln für die Zerfallsbreite.

4.12 Im Oszillatorpotential gilt im Grundzustand $E = 3\,\omega/2$. Aus dem Spektrum haben wir für das Charmonium $\omega = 315\,\mathrm{MeV}$ abgelesen. Da die potentielle und kinetische Energie im Mittel gleich groß sind, gilt $3\,\omega/2 = 2(m_c\,\gamma - m_c)$, wobei in der Klammer rechts der Ausdruck für die relativistische kinetische Energie steht. Mit $\beta^2 = 1 - 1/\gamma^2$ bekommen wir $\beta^2 = 0{,}25$. Die gleiche Rechnung gibt im Fall des Bottomoniums $\beta^2 = 0{,}12$.

4.13 Aus (4.179) entnehmen wir $|Q_b| = 1/3$. Aus (4.197) bestimmen wir mit $\alpha_s = 0{,}196$ eine hadronische Zerfallsbreite von 57 keV!

4.14 Die Auswertung der zu (4.219) analogen Formel ergibt $M_{\eta_b} = M_\Upsilon - 3{,}3\,\mathrm{MeV}$.

8.5 Kapitel 5

5.1 Als Beispiel nehmen wir blaue u-Quarks. Es gibt die Prozesse $u_B \to u_G g_{B\bar{G}}$, $u_B \to u_R g_{B\bar{R}}$ und $u_B \to u_B g_{B\bar{B}}$. Die Amplituden der ersten beiden haben das Gewicht 1 wegen der Wellenfunktionen (4.26), während die dritte Reaktion über die Wellenfunktion (4.29) einen Wichtungsfaktor $2/\sqrt{6}$ erhält. Diese Faktoren müssen quadriert und addiert werden. Nach Multiplikation mit dem üblichen Faktor 1/2 erhält man $c_\mathrm{F} = 4/3$.

5.2 Die Energien werden gemäß $E_1 > E_2 > E_3$ angeordnet. Dann gilt

$$\sum |\boldsymbol{p}_i \boldsymbol{n}| = |E_1 \cos\Theta_1| + |E_2 \cos\Theta_2| + |E_3 \cos\Theta_3| \ .$$

Die rechte Seite ist aber $\geq |E_1 \cos\Theta_1| + |E_2 \cos\Theta_2 + E_3 \cos\Theta_3|$ und wegen der Impulserhaltung $\geq 2|E_1 \cos\Theta_1|$. Im Maximum $(\cos\Theta_1 = 1)$ gilt das Gleichheitszeichen. Damit ist der Beweis vollständig.

5.3 Beim isotropen Zerfall eines System in Teilchen gleicher Masse sind alle Impulse gleich groß. Damit wird T proportional zu $\int |\cos\Theta| \mathrm{d}\cos\Theta$ Dieses Integral hat den Wert 1/2.

5.4 Die Experimente wurden alle an ruhenden Protonen durchgeführt. Es gilt $q^2 = -2\,E\,E'(1-\cos\Theta)$ also

$$EE' = \frac{-q^2}{1-\cos\Theta} = a$$

und

$$E - E' = \frac{-q^2}{2M} = b \ .$$

Die Auflösung nach E' lautet

$$E' = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + a} \ .$$

Damit erhalten wir $E = 1{,}022\,\mathrm{GeV}$, $E' = 0{,}489\,\mathrm{GeV}$ für $\Theta = 90°$ und $E = 11{,}732\,\mathrm{GeV}$, $E' = 11{,}199\,\mathrm{GeV}$ für $\Theta = 5°$.

5.5 Es gilt

$$\rho(r) = \frac{1}{2a^3}\mathrm{e}^{-ar} \ .$$

Beweis durch Einsetzen in (5.40).

5.6 Wir legen die z-Achse des Koordinatensystems in die Richtung des einlaufenden Protons. Mit $x = -q^2/(2\, q \cdot P)$ und $y = q \cdot P/(e \cdot P)$ folgt

$$x = \frac{2EE'(1+\cos\Theta)}{4E_pE - 2E_pE'(1-\cos\Theta)}$$

und

$$y = 1 - \frac{E'}{E}\frac{1-\cos\Theta}{2} \quad .$$

5.7 Wir bleiben im HERA-System. Mit den Ergebnissen der letzten Aufgabe gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q^2}{\partial \cos\Theta} &= -2EE' \\
\frac{\partial q^2}{\partial E'} &= -2E(1+\cos\Theta) \\
\frac{\partial y}{\partial \cos\Theta} &= +\frac{E'}{2E} \\
\frac{\partial y}{\partial E'} &= -\frac{1}{2E}(1-\cos\Theta) \quad .
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\frac{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}y}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{E'}{\pi}$$

und mit $q^2 = -x\, y\, s$

$$\frac{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{E'x}{\pi y} \quad .$$

Der Beweis für ruhende Protonen ist noch einfacher.

5.8 Die Auswertung von (5.152) ergibt einen Wirkungsquerschnitt von 2365, 1568 und 2360 pb für die Produktion von π^0-, η- und η'-Mesonen. Darin kommt zum Ausdruck, dass $\Gamma_{\gamma\gamma}$ für diese Mesonen ungefähr proportional zu M^3 ist.

8.6 Kapitel 6

6.1 Die Streuamplitude (6.10) wird in der Konvention der Kernphysik zu

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} G_{\mathrm{F}} \sqrt{s} \ .$$

Da keine Winkelabhängigkeit vorliegt, entspricht dies dem Term mit $J=0$ in (2.267)

$$f = \frac{2}{\sqrt{s}} t^{0}_{\frac{-1}{2}\ \frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\ \frac{-1}{2}} \ .$$

Die Amplitude ist reell, der Realteil von t_0 kann maximal den Wert $1/2$ erreichen. Das ergibt $s_{\max} = \sqrt{2}\pi/G_{\mathrm{F}}$.

6.2 Hier hilft nur, die Amplitude (6.25) mit den im Text angegebenen Werten der kinematischen Variablen auszurechnen.

6.3 Das τ kann hadronisch in die Kanäle $u\bar{d}$, $u\bar{s}$ zerfallen. Die leptonischen Zerfallskanäle sind $e^+ \nu_e$ und $\mu^+ \nu_\mu$. Bei Vernachlässigung von Masseneffekten gilt $\Gamma_h/\Gamma_{e+\mu} = 3/2$, da bei den hadronischen Zerfällen die Farben gezählt werden müssen und $\cos^2 \Theta_{\mathrm{C}} + \sin^2 \Theta_{\mathrm{C}} = 1$ gilt.

6.4 Mit $\boldsymbol{p} \to 0$ wird aus (3.66)

$$u_r = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_r \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

und analog für $u_{r'}$. Damit gilt $j^0_{\mathrm{V}} = 2m\chi^\dagger_{r'}\chi_r$, $j^i_{\mathrm{V}} = 0$ bzw. $j^0_{\mathrm{A}} = 0$, $j^i_{\mathrm{A}} = 2m\chi^\dagger_{r'}\sigma^i\chi_r$,

6.5 Wir bezeichnen mit $T_{\lambda_d\lambda_u\lambda_e\lambda_{\bar{\nu}}}$ die Amplitude mit bestimmten Helizitäten bzw. Spinprojektionen. Ohne Vernachlässigung von m gilt

$$\begin{aligned}
T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}} &= -8\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} c_1 \sqrt{m_u m_d \omega}\cos(\Theta/2)(\sqrt{E+m} + \sqrt{E-m}) \\
T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= 8\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} c_1 \sqrt{m_u m_d \omega}\sin(\Theta/2)(\sqrt{E+m} - \sqrt{E-m}) \\
T_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}} &= 8\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} c_1 \sqrt{m_u m_d \omega}\sin(\Theta/2)(\sqrt{E+m} + \sqrt{E-m}) \\
T_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}} &= 8\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} c_1 \sqrt{m_u m_d \omega}\cos(\Theta/2)(\sqrt{E+m} - \sqrt{E-m}) \ .
\end{aligned}$$

Alle anderen Amplituden verschwinden. Die Summe der Quadrate dieser Amplituden ergibt das gleiche Resultat wie im masselosen Fall.

6.6 MAPLE (oder ein anderes algebraisches Programm) erspart Ihnen das Nachschlagen in Integraltabellen zur Verifizierung von

$$\Gamma = 0,48 \frac{G_{\mathrm{F}}^2 c_1^2 \Delta^5}{15\pi^3} \quad .$$

6.7 Aus den Amplituden der vorletzten Aufgabe berechnet man unmittelbar die Wahrscheinlichkeiten $P(e_{\mathrm{L}})$ bzw. $P(e_{\mathrm{R}})$ und

$$\frac{P(e_{\mathrm{L}}) - P(e_{\mathrm{R}})}{P(e_{\mathrm{L}}) + P(e_{\mathrm{R}})} = \beta_e \quad .$$

6.8 In der Nomenklatur der Aufgabe 6.5 gilt für den Zerfall $t \to b + W$

$$\begin{aligned}
T_{\frac{-1}{2}\,\frac{-1}{2}0} &= g\sqrt{m_t E_b}\frac{E_W + |\boldsymbol{p}_W|}{M_W}\cos(\Theta/2) \\
T_{\frac{-1}{2}\,\frac{-1}{2}1} &= g\sqrt{m_t E_b}\sqrt{2}\sin(\Theta/2) \\
T_{\frac{-1}{2}\,\frac{-1}{2}0} &= -g\sqrt{m_t E_b}\frac{E_W + |\boldsymbol{p}_W|}{M_W}\sin(\Theta/2) \\
T_{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}1} &= g\sqrt{m_t E_b}\sqrt{2}\cos(\Theta/2)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $m_b = 0$ benutzt. Alle anderen Amplituden verschwinden. Damit wird (6.92) auf die übliche Art berechnet.

6.9 Zum Beweis muss

$$T_{fi} = \frac{g^2}{2}\bar{u}_{\mathrm{R}}(k)\ \not{\epsilon}_0^*(p')\frac{\not{q}}{q^2}\ \not{\epsilon}_0^*(k')u_{\mathrm{L}}(p)$$

ausgewertet werden.

8.7 Kapitel 7

7.1 Das Integral von (7.36) ergibt

$$\sigma_{uu} = \frac{4\pi}{3s}\alpha^2 N_{\mathrm{C}} G_1 \quad .$$

Damit folgt $R = 3\,G_1$. Eine graphische Auswertung findet sich im Web.

7.2 Hier sollten Sie die graphische Auswertung im Web mit Ihrem Resultat vergleichen.

7.3 Die Zahl der linkshändigen τ-Leptonen ist proportional zur Summe der Quadrate der ersten und dritten Zeile der Tabelle 7.1. Entsprechend wird die Zahl der rechtshändigen τ-Leptonen aus der zweiten und vierten Zeile bestimmt. Auf der Z^0-Resonanz kann der Beitrag des Photon-Austausches vernachlässigt werden. Damit gilt

$$P_{\mathrm{L}} = \frac{c_{\mathrm{L}}^4 - c_{\mathrm{R}}^4}{(c_{\mathrm{L}}^2 + c_{\mathrm{R}}^2)^2} \quad .$$

7.4 Die numerische Integration erfolgt am besten mit dem sog. Monte-Carlo-Verfahren. Eine MAPLE-Routine findet sich im Web. Bei Verwendung der Partondichten (5.102) erhalten wir $L_{u\,d}(0{,}1) \approx 1$.

7.5 Die Antwort ist in (7.68) enthalten. Mit $m_u, m_d, m_c = 0$ folgt bei Vernachlässigung des Cabibbo-Winkels

$$\frac{\Gamma^W_{u\bar{d}}}{\Gamma^W_{c\bar{b}}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m_b^2}{M_W^2}\right)\left(2 + \frac{m_b^2}{M_W^2}\right)|V_{cb}|^2 \approx |V_{cb}|^2 \quad .$$

7.6 Beweis durch Einsetzen von $E = E_1 + E_2$ und $p_{\mathrm{L}} = E_1 - E_2$ in (7.95) unter Benutzung von $z_i = E_i/E_p$.

7.7 Mit $\sigma \approx 50$ mb und $n \approx 30$ ergibt sich $n_h \approx 10^{20}$. Hierbei wurde eine effektive Laufzeit von 10^7 s angenommen. Im Vorwärtsbereich des Detektors also zwischen $\eta' = 2.5$ und $\eta' = 2.0$ sind das immer noch 10^{19} Teilchen. Da die innersten Schichten des Detektors nur 5 cm von der Strahlachse entfernt liegen, ergibt sich hier ein Fluss von $0{,}3 \cdot 10^{19}$ Teilchen $\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{a}^{-1}$.

7.8 Die Auswertung der Feynman-Regeln ergibt $T = g\,M_W$ für den Zerfall in transversal polarisierte W-Bosonen. Der Rest der Aufgabe wird dann wieder auf die übliche Weise erledigt.

7.9 Im Text wurde erläutert, dass am LHC (7 TeV) der Wirkungsquerschnitt der $t\bar{t}$-Produktion etwa 180 pb beträgt, während Higgs-Bosonen mit ca. 15 pb erzeugt werden. Aus Abb. 7.24 lesen wir einen Wirkungsquerschnitt der Higgs-Produktion von etwa 30 pb ab. Da beide Teilchen dominant in b-Quarks zerfallen, ist das Verhältnis der Anzahl der erzeugten b-*jets* etwa 15.

7.10 Es wird jeweils nur die führende Ordnung in λ mitgenommen, also $V_{u\,d} = 1 - \lambda^2/2$, $V_{u\,s} = \lambda$, $V_{u\,b} = A\,\lambda^3(\rho - \mathrm{i}\eta)$. Die letzte Gleichung wird mit Hilfe der Identitäten $\cos\delta_{13} = \rho/\sqrt{\eta^2 + \rho^2}$ und $\sin\delta_{13} = \eta/\sqrt{\eta^2 + \rho^2}$ abgeleitet. Die weiteren Matrixelemente werden dann in analoger Weise bestimmt.

7.11 Zeichnen Sie eine Strecke $C\,B$ der Länge 1, die das Produkt $|\,V_{c\,b}\,V_{c\,d}|$ repräsentiert. Dann wird ein Kreis um C mit dem Radius 0,368 (entsprechend $|\,V_{u\,b}\,V_{u\,d}|$ und ein Kreis um B mit dem Radius 0,935 (entsprechend $|\,V_{t\,b}\,V_{t\,d}|$) geschlagen. Im Schnittpunkt liegt die Dreiecksspitze A.

7.12 Es gilt $N_\nu = 2\,S/\,W$, wobei S die Solarkonstante und W die Wärmetönung aus (7.209) ist. Dies ergibt einen Fluss von $6{,}57 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$.

7.13 In Abb. 7.40 werden die Photonen durch W-Bosonen ersetzt. Die senkrechte Linie in der Schleife ist dann z.B ein ν_μ und die schrägen Linien gehören zu einem Myon, das an das Z^0 koppelt.

7.14 Entsprechend dem Z^0-Zerfall gibt es $\tilde{Z}^0 \to \tilde{e^-}\tilde{e^+}$, $\tilde{Z}^0 \to \tilde{\mu^-}\tilde{\mu^+}$, $\tilde{Z}^0 \to \tilde{u}\tilde{\bar{u}}$ usw. Beim Zerfall der Sfermionen in das LSP sind dann typische Kanäle durch $\tilde{\mu} \to \mu\tilde{\gamma}$ gegeben.