

Ausstrahlung bei Stößen sehr schneller Elektronen.

Von C. F. v. Weizsäcker, zur Zeit in Kopenhagen.

(Eingegangen am 28. Februar 1934.)

Die Ausstrahlung wird in dem Koordinatensystem berechnet, in dem das stoßende Elektron anfangs ruht. Das Coulombfeld des „vorbeifliegenden“ gestoßenen Atomkerns läßt sich dann als Strahlungsfeld auffassen; die Ausstrahlung ist Streuung dieser „Strahlung“ nach der Klein-Nishina-Formel. Das Resultat ist innerhalb der verwendeten Näherung mit den früheren Rechnungen identisch. Seine Herleitung und die Voraussetzungen für seine Gültigkeit werden anschaulich diskutiert.

Einleitung. Über die Wechselwirkung zwischen schnellen Elektronen und dem Strahlungsfeld sind in der letzten Zeit verschiedene Rechnungen angestellt worden¹⁾. Es handelte sich dabei um die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit der folgenden beiden Prozesse:

1. Emission eines Lichtquants bei der Geschwindigkeitsänderung, die ein Elektron während des Vorbeifliegens an einem Atomkern erleidet (Bremsstrahlung).
2. Umwandlung eines sehr harten Lichtquants ($h\nu > 2mc^2$) in ein negatives und ein positives Elektron unter der Einwirkung des elektrischen Feldes eines Atomkerns (Paarerzeugung).

Die beiden Probleme sind mathematisch praktisch identisch; der erste Prozeß bedeutet das Herabfallen eines Elektrons aus einem höheren in einen tieferen Zustand positiver Energie, der zweite die Emporhebung eines Elektrons aus einem Zustand negativer Energie in einen Zustand positiver Energie. Dementsprechend gehen die Formeln für die Wahrscheinlichkeiten der beiden Prozesse — bei richtiger Berücksichtigung der für Emissions- und Absorptionswahrscheinlichkeiten verschiedenen Dimensions- und Normierungsfaktoren — durch Änderung des Vorzeichens der Energie des tieferen Zustandes auseinander hervor. Daß beide Prozesse nicht im Vakuum, sondern nur bei Anwesenheit eines Feldes stattfinden können, folgt aus der Bedingung der Erhaltung von Energie und Impuls; der Atomkern muß den bei der Umwandlung von Elektronenenergie in Strahlungsenergie entstehenden Impulsexzess übernehmen.

¹⁾ W. Heitler, ZS. f. Phys. **84**, 145, 1933; J. R. Oppenheimer u. M. S. Plesset, Phys. Rev. **44**, 53, 1933; W. Heitler u. F. Sauter, Nature **132**, 892, 1933; W. Heitler und H. Bethe, Proc. Roy. Soc. London (A) im Erscheinen. Ich bin Herrn Dr. Sauter und Herrn Dr. Bethe für die briefliche Mitteilung ihrer Resultate sehr dankbar.

Im folgenden soll auf eine Methode zur Behandlung des Problems hingewiesen werden, die auf einen Gedanken von Fermi¹⁾ zurückgeht, und die besonders von Williams²⁾ auf verschiedene Probleme mit Erfolg angewandt wurde. Diese Methode, die den Vorteil größerer Einfachheit und Anschaulichkeit hat, erlaubt zwar im allgemeinen nur eine näherungsweise Behandlung. Wir werden aber sehen, daß der prozentuale Fehler beliebig klein wird, wenn nur die Anfangsenergie des Elektrons groß genug war. Dies gilt jedenfalls für den im folgenden ausführlich behandelten Fall des unabgeschirmten Coulomb-Feldes; bei der unmittelbaren Übertragung der Methode auf abgeschirmte Felder, die sich mühelos durchführen läßt (s. § 4, 2), bleibt der Fehler dagegen noch von der Größenordnung $1/\log 137$. Da die Methode von einer anschaulichen Vorstellung ausgeht, die dem Prozeß 1 (Bremsstrahlung) entspricht, wird im folgenden nur von diesem die Rede sein; die Resultate lassen sich aber natürlich sofort auf den Prozeß der Paarerzeugung übertragen.

§ 1. Klassischer Grenzfall. Es soll zunächst eine Abschätzung für die Ausstrahlung angegeben werden, die man nach der klassischen (d. h. hier der relativistischen, aber nicht quantenmechanischen) Theorie zu erwarten hätte (vgl. dazu auch Heitler, l. c. § 6, 3).

Es fliege ein Elektron der Gesamtenergie $\xi \cdot mc^2$ an einem Atomkern der Ladung Ze vorbei. ξ ist mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ des Elektrons durch die Gleichung

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1)$$

verbunden. ξ sei groß gegen 1; wir vernachlässigen alle Effekte der Größenordnung $1/\xi$. Wir dürfen ferner in dem Gebiet, in dem die klassische Rechnung überhaupt einen Sinn hat, die Bahn des Elektrons im Kernfeld als praktisch geradlinig ansehen; der kleinste Abstand dieser Geraden vom Kern (der Stoßparameter) heiße r . Es erweist sich schon hier und noch mehr in der quantenmechanischen Rechnung als bequem, die Berechnung der Ausstrahlung in dem Koordinatensystem vorzunehmen, in dem das Elektron anfänglich ruht (Ruhssystem), und erst nachträglich durch Lorentz-Transformation in das physikalisch interessierende System zurückzukehren, in dem der Kern ruht (Kernsystem). Alle im Ruhssystem gemessenen Größen sollen durch einen Strich bezeichnet werden. Ferner sollen noch

¹⁾ E. Fermi, ZS. f. Phys. **29**, 315, 1924. — ²⁾ E. J. Williams, Proc. Roy. Soc. London (A) **139**, 163, 1933, sowie eine im Erscheinen begriffene Fortsetzung dieser Arbeit.

zwei Abkürzungen eingeführt werden: die Compton-Wellenlänge heiße $2\pi\lambda$, der Elektronenradius d :

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad d = \frac{e^2}{mc^2}, \quad \lambda = \frac{\hbar c}{e^2} d. \quad (2)$$

Wir haben nun das Feld des Kerns im Ruhssystem zu bestimmen. Es ergibt sich aus dem ruhenden Coulomb-Feld, das im Kernsystem besteht, nach den bekannten relativistischen Transformationsformeln (\parallel und \perp beziehen sich auf die Richtung des für die Transformation charakteristischen Geschwindigkeitsvektors v):

$$\mathfrak{E}'_{\parallel} = \mathfrak{E}_{\parallel}, \quad \mathfrak{E}'_{\perp} = \frac{\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[v \mathfrak{H}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3a)$$

$$\mathfrak{H}'_{\parallel} = \mathfrak{H}_{\parallel}, \quad \mathfrak{H}'_{\perp} = \frac{\left(\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[v \mathfrak{E}]\right)_{\perp}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3b)$$

Die zur Flugrichtung senkrechte Komponente des Kernfeldes wird also mit dem Faktor ξ multipliziert; wir können daher die parallele Komponente gegen sie vernachlässigen. Dagegen wird durch die Lorentz-Kontraktion die Breite des Gebiets, in dem eine merkliche Kraft herrscht, und damit die Dauer t des Stoßprozesses um den Faktor $1/\xi$ herabgesetzt. Da das Elektron anfangs ruht und, solange $r \gg Z \cdot d$, durch den Stoß im ganzen eine wesentlich kleinere Geschwindigkeit als c erhält, können wir die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie S' nach der Formel

$$S' = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\ddot{r})^2 \quad (4)$$

berechnen; für die im ganzen ausgestrahlte Energie $\eta' \cdot mc^2$ ergibt sich daraus bei Einsetzung eines mittleren Feldes für die ganze Stoßdauer größtenordnungsmäßig

$$\eta' mc^2 = S' \cdot t \simeq \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{e \bar{\mathfrak{E}}}{m} \right)^2 \cdot t = \frac{e^2}{c^3} \cdot \frac{e^2}{m^2} \cdot \left(\frac{Ze}{r^2} \xi \right)^2 \cdot \frac{r}{c \xi} = Z^2 \frac{d^3}{r^3} \xi m c^2. \quad (5)$$

Um hieraus die im Kernsystem ausgestrahlte Energie berechnen zu können, müssen wir noch ihre Verteilung über die Richtungen im Raum beachten. Zufolge der Transformationsformel für die Energie, die für Licht die Form

$$E = \frac{E' - \beta c p'_{\parallel}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = E' (1 - \beta \cos \Theta) \xi \quad (6)$$

($\Theta =$ Winkel zwischen der Flugrichtung des Kerns und der Emissionsrichtung der Strahlung im Ruhssystem) annimmt, wird in der Flugrichtung des Kerns emittierte Strahlung mit dem Faktor $(1 - \beta) \xi \simeq \frac{1}{2} \xi$, entgegengesetzt gerichtete Strahlung dagegen mit dem Faktor $(1 + \beta) \xi \simeq 2 \xi$ multipliziert. Andererseits ist die emittierte Strahlung axialsymmetrisch um die Richtung der Beschleunigung des Elektrons verteilt, die ihrerseits auf der Flugrichtung des Kerns senkrecht steht; man hat daher (5) noch mit einem Faktor der Größenordnung ξ zu multiplizieren. So folgt

$$\eta \simeq Z^2 \frac{d^3}{r^3} \xi^2. \quad (7)$$

η/ξ , der Bruchteil der Gesamtenergie, der beim Stoßabstand r emittiert wird, über alle möglichen Stoßabstände integriert, liefert den „Wirkungsquerschnitt“ des Kerns für diesen Strahlungsprozeß. Wir wollen uns jedoch bei der Integration auf diejenigen Stoßabstände beschränken, bei denen die Voraussetzung von (7), die klassische Theorie der Ausstrahlung, noch gilt, und den Teil des Wirkungsquerschnitts, den wir so erhalten, dann mit dem von Heitler und Sauter quantenmechanisch berechneten Gesamtquerschnitt vergleichen.

Die Gültigkeitsgrenze der klassischen Rechnung ergibt sich daraus, daß wir das Elektron quantentheoretisch nicht genauer als mit einer Ortsunbestimmtheit $\Delta x \gg \hbar/mc$ lokalisieren dürfen, weil sonst seine in die Berechnung der Ausstrahlung eingehende Geschwindigkeit völlig unbestimmt wird. Ein solches Wellenpaket wird sich aber nur solange nach der klassischen Theorie bewegen, als das äußere Feld nicht auf Strecken von der Größenordnung Δx merklich variiert. Die Breite, innerhalb deren das lorentzkontrahierte Coulomb-Feld stark variiert, ist aber r/ξ . Also gilt die klassische Rechnung unter der Bedingung

$$r \gg \lambda \xi. \quad (8)$$

Der Beitrag des durch (8) erlaubten Gebiets zum Wirkungsquerschnitt ist

$$q_{\text{klass.}} \simeq \int_{\lambda \xi}^{\infty} \frac{\eta}{\xi} r dr = \frac{Z^2 d^3}{\lambda} \simeq \frac{Z^2 d^3}{137}. \quad (9)$$

Die Formel von Heitler und Sauter lautet dagegen

$$q = \frac{Z^2 d^3}{137} \left[4 \log 2 \xi - \frac{4}{3} \right]. \quad (10)$$

Unsere Abschätzung hat also nahezu die richtige Größenordnung geliefert. Die durch das logarithmische Glied in (10) ausgedrückte Abhängigkeit

des Wirkungsquerschnitts von ξ ergibt sich jedoch erst durch eine Berücksichtigung der kleineren Stoßradien, zu der ein quantenmechanisches Analogon der Methode dieses Paragraphen notwendig ist.

§ 2. Idee der quantenmechanischen Rechnung. Fehlerabschätzung. Wollten wir die klassische Rechnungsweise unmittelbar in die Quantenmechanik übertragen, so würde die Rechnung sehr kompliziert. Wir können die Schwierigkeiten jedoch an eine Stelle schieben, wo sie seit langem gelöst sind, indem wir das Kernfeld als Strahlungsfeld auffassen, und die Ausstrahlung durch das Elektron, die es verursacht, als Streuung nach der Formel von Klein und Nishina berechnen.

Zwar läßt sich das Coulomb-Feld als Ganzes nicht wie ein Strahlungsfeld als Superposition transversaler ebener Wellen darstellen, da es nicht divergenzfrei ist. Für die Berechnung der Ausstrahlung ist jedoch nur der zeitliche und räumliche Verlauf des Feldes in dem Raumgebiet wichtig, in dem sich das Elektron befindet. Wenn dieses Gebiet klein ist, so daß man darin von der Variation der Feldstärken *senkrecht* zur Fortpflanzungsrichtung der Felderregung (d. h. zur Flugrichtung des Kerns) absehen kann, und wenn die Geschwindigkeit des Kerns und damit seines ganzen Feldes sich von der Lichtgeschwindigkeit nur noch wenig unterscheidet, so läßt sich der Gesamtverlauf des Feldes in diesem Gebiet nahezu als Überlagerung transversaler ebener Wellen darstellen, die sich in der Flugrichtung des Kerns fortpflanzen; man hat dann also nur den zeitlichen Verlauf der Feldstärken für jeden Stoßabstand einzeln einer Fourier-Analyse zu unterwerfen.

Wir wollen den Genauigkeitsgrad dieser Annäherung untersuchen. Die Ersetzung des Kernfeldes durch ein Strahlungsfeld enthält vier Ungenauigkeiten:

1. Das Kernfeld bewegt sich nicht genau mit der Lichtgeschwindigkeit.
2. Das Kernfeld ist nicht streng transversal.
3. Elektrische und magnetische Feldstärke sind im Kernfeld nicht genau gleich groß.
4. Das Kernfeld variiert auch innerhalb des vom Elektron eingenommenen Raumgebiets noch senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Die erste Ungenauigkeit ist von der Größenordnung $1/\xi^2$. ξ ist ja mit der Kerngeschwindigkeit durch (1) verbunden; daraus folgt

$$\frac{c-v}{c} = 1 - \beta = \frac{1}{2\xi^2}. \quad (11)$$

Die zweite Ungenauigkeit ist von der Größenordnung $1/\xi$. Denn nach (3) unterscheiden sich die senkrechten Feldkomponenten von den parallelen um den Faktor ξ .

Die dritte Ungenauigkeit ist nach (11) wieder von der Größenordnung $1/\xi^2$, da sie nur davon herröhrt, daß in (3a) \mathfrak{E} , in (3b) dagegen $\left[\frac{v}{c} \mathfrak{E}\right]$ vorkommt.

Die vierte Ungenauigkeit hängt vom Stoßabstand ab. Da das Wellenpaket des Elektrons mindestens die Breite λ haben muß, ist die Variation der Feldstärke quer durch das Wellenpaket

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} \lambda = \frac{2 Ze}{r^3} \xi \lambda, \quad (12)$$

und die relative Variation

$$\frac{\Delta \mathfrak{E}}{\mathfrak{E}} = \frac{2\lambda}{r}. \quad (13)$$

Dies ist $\sim 1/\xi$ für $r = \lambda\xi$ und wird von der Größenordnung 1 für $r = \lambda$. Für $r < \lambda$ würde die Methode also völlig versagen; da die Rechnung jedoch zeigen wird, daß die Ausstrahlung schon beim Stoßabstand $r \sim \lambda\xi$ wesentlich zu werden beginnt, wird der relative Fehler, den die Vernachlässigung dieser Variation verursacht, im Mittel über alle Stoßabstände $> \lambda$ doch mit wachsendem ξ verschwinden.

Wir dürfen also erwarten, daß unsere Methode bis auf Fehler der Größenordnung $1/\xi$ die richtige Ausstrahlungswahrscheinlichkeit liefert, wenn wir noch zeigen können, daß bei Stoßabständen $< \lambda$, wo sie nicht mehr zuständig ist, keine mit dem integrierten Effekt für größere r vergleichbare Ausstrahlung mehr erfolgt. Um das einzusehen, vergleichen wir ein Wellenpaket in großem Abstand vom Kern mit einem Wellenpaket, durch das (im Ruhsystem) der Kern hindurchfliegt. Im ersten Fall erfahren, wegen der Konstanz der Kraft quer durch das Wellenpaket, alle seine Teile dieselbe Beschleunigung, und die von den verschiedenen Raumpunkten im Wellenpaket emittierten Strahlungen werden sich in der Weise superponieren, wie es bei der Ableitung der Klein-Nishina-Formel vorausgesetzt ist. Im zweiten Fall erfahren dagegen solche Teile der Ladungsverteilung, die auf verschiedenen Seiten der Bahn des Kerns liegen, Beschleunigungen von entgegengesetzter Richtung, und die von ihnen emittierten Strahlungen schwingen daher mit entgegengesetzter Phase. Solange das Wellenpaket klein ist gegen die Wellenlänge des emittierten Lichtes, wird seine Ausstrahlung infolgedessen durch Interferenz ausgelöscht werden. Nun zeigt die Rechnung (vgl. § 4, 1), daß von allen Wellenlängen, die in

der Fourier-Analyse des Coulomb-Feldes enthalten sind, nur die (verglichen mit der Halbwertsbreite des lorentzkontrahierten Feldes bei den entscheidenden Stoßradien) langen Wellenlängen der Größenordnung λ für die Streuung wesentlich sind. Die Wellenpakete, mit denen wir noch rechnen dürfen, sind also nicht mehr wesentlich größer als die Wellenlänge des Streulichtes, und wir haben daher auch kein Anwachsen der Ausstrahlung mehr zu erwarten, wenn sie dem Kern so nahe kommen, daß er durch sie hindurchfliegen kann. Wir werden folglich in den künftigen Rechnungen $\sim \lambda$ als minimalen Stoßabstand einsetzen.

§ 3. Berechnung der Ausstrahlung im Coulomb-Feld. Sei $\hbar\omega = \alpha \cdot mc^2$ die Energie des emittierten Lichtquants ($\epsilon = \alpha/\xi$ bezeichne dieselbe Energie, gemessen in Einheiten der Primärenergie des Elektrons), so ist nach den Rechnungen von Heitler und Sauter der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Emission eines Quants zwischen ϵ und $\epsilon + d\epsilon$

$$dq = \frac{4Z^2d^2}{137} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \left[\frac{4}{3}(1-\epsilon) + \epsilon^2 \right] \left(\log 2\xi \frac{1-\epsilon}{\epsilon} - \frac{1}{2} \right). \quad (14)$$

Diese Formel soll folgendermaßen abgeleitet werden: Zunächst wird für jeden Stoßabstand die Fourier-Analyse des über das Elektron wegstreichenden Kernfeldes vorgenommen. Aus jeder Komponente wird ein gewisser Bruchteil herausgestreut mit einer aus der Klein-Nishina-Formel folgenden Intensitätsverteilung über die Streuwinkel. Die Frequenz ω' des gestreuten Lichtes folgt aus der Frequenz ω_0' der Komponente, der es entstammt, und dem Streuwinkel nach der Comptonschen Formel. Nun geht man durch Lorentz-Transformation ins Kernsystem über und faßt alle diejenigen Streustrahlungen zusammen, die hier Frequenzen zwischen ϵ und $\epsilon + d\epsilon$ haben. Zu jeder Streurichtung gibt es nur eine primäre Fourier-Komponente, die nach der Energie-Impulsbedingung beim Compton-Effekt gerade die richtige gestreute Frequenz liefert; somit ist nur eine einmalige Integration über alle Streuwinkel und dann eine Integration über alle Stoßabstände notwendig. Größen der Ordnung $1/\xi$, für die das Verfahren nach § 2 ohnehin versagt, sollen bei dieser Rechnung stets vernachlässigt werden.

Wir haben zunächst die Intensität der auf das Elektron fallenden „Strahlung“ zu bestimmen, d. h. die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tretende Energie. Sie ist gegeben durch den Poyntingschen Vektor

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \quad (15)$$

Da die im ganzen eingestrahlte Energie endlich ist (der Energieinhalt des Coulomb-Feldes in dem unendlich langen Zylinder, den das Elektron beim Stoß durchstreicht), interessiert uns das Zeitintegral von \mathfrak{S} bzw. sein Absolutbetrag

$$F = \int |\mathfrak{S}| dt = \frac{3}{32} \frac{Z^2 e^2}{r^3} \xi. \quad (16)$$

Zur spektralen Zerlegung dieses Feldes brauchen wir die Fourier-Komponenten der elektrischen Feldstärke; da wir von dieser nur den zur Bahn senkrechten Anteil berücksichtigen, der in der Zeit symmetrisch ist, schreiben wir

$$\mathfrak{E}_\perp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(\omega'_0) \cos \omega'_0 t dt \quad (17)$$

und erhalten

$$f(\omega'_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_\perp \cos \omega'_0 t dt = \frac{Ze\xi}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{r \cos \omega'_0 t dt}{(r^2 + c^2 \xi^2 t^2)^{3/2}}. \quad (18)$$

Es gilt dann

$$\int_0^\infty f^2(\omega'_0) d\omega'_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_\perp^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]| dt = \frac{4\pi}{c} F. \quad (19)$$

Daher liegt es nahe, $F_{\omega'_0} = \frac{c}{4\pi} f^2(\omega'_0)$ als das Zeitintegral der Intensität pro Frequenzintervall zu bezeichnen und als Ausgangspunkt für die Berechnung der Streuung nach der ja nur auf monochromatisches Licht anwendbaren Klein-Nishina-Formel zu verwenden. Diesem Rechenverfahren liegt natürlich die Voraussetzung zugrunde, daß die Wirkungen der verschiedenen Frequenzen in der Fourier-Analyse überhaupt getrennt berechnet werden dürfen, d. h. daß es erlaubt sei, von der zwischen ihnen bestehenden Phasenbeziehung abzusehen (zur Rechtfertigung dieser Annahme vgl. § 4, 3.).

Die Auswertung des Integrals (18) führt auf Zylinderfunktionen; bei dem hier angestrebten Genauigkeitsgrad genügt jedoch die folgende Schematisierung. Die in (18) als Faktor von $\cos \omega'_0 t$ auftretende Feldstärke hat als Funktion der Zeit ein steiles Maximum bei $t = 0$; solange $1/\omega'_0$ klein ist gegen die Halbwertsbreite dieser Funktion (d. h. gegen die Stoßzeit)

ist der \cos mit ihr verglichen langsam veränderlich, und $f(\omega_0)$ hat nahezu den konstanten Wert

$$f\left(\omega'_0 \ll \frac{c\xi}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_\perp(t) dt = \frac{2Ze}{\sqrt{\pi r c}}. \quad (20)$$

Ist $1/\omega'_0$ umgekehrt groß gegen die Stoßzeit, so verschwindet das Integral durch Interferenz. Wenn wir f unterhalb einer gewissen Grenzfrequenz konstant annehmen und oberhalb derselben gleich Null setzen, begehen wir daher keinen großen Fehler; der besondere Umstand, daß sich überhaupt nur die kleinen Primärfrequenzen $\omega_0 \sim \frac{mc^2}{\hbar}$ als wesentlich erweisen (vgl. § 4, 1.), bewirkt, daß die Abweichung in der hier vernachlässigten Größenordnung bleibt. Die Grenzfrequenz setzen wir ungefähr gleich der Stoßzeit; ihre genaue Festlegung [d. h. die exakte Angabe des Faktors k in Gleichung (21), dessen Größenordnung 1 ist] wird sich für unsere Zwecke als unnötig herausstellen. Führen wir noch die dimensionslose Frequenzvariable $\alpha'_0 = \frac{\hbar\omega'_0}{mc^2}$ ein, so folgt

$$F_{\alpha'_0} d\alpha'_0 = \begin{cases} \frac{Z^2 e^2}{\pi^2 r^2 \lambda} d\alpha'_0 & \left(\alpha'_0 < k \frac{\lambda \xi}{r}\right), \\ 0 & \left(\alpha'_0 > k \frac{\lambda \xi}{r}\right). \end{cases} \quad (21)$$

Nach Klein und Nishina ist nun die aus dem Frequenzintervall $d\alpha'_0$ ins Winkelintervall $d\Omega$ gestreute Energie

$$\begin{aligned} & mc^2 \cdot d\eta'(r, \alpha_0, \Theta) \\ &= F_{\alpha'_0} \frac{d^2}{2} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{[1 + \alpha'_0(1 - \cos \Theta)]^3} \left(1 + \alpha'^{-2}_0 \frac{(1 - \cos \Theta)^2}{(1 + \cos^2 \Theta)[1 + \alpha(1 - \cos \Theta)]}\right) d\alpha'_0 d\Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Primärfrequenz α'_0 hängt mit der gestreuten Frequenz α' nach der Comptonschen Formel

$$\alpha'_0 = \frac{\alpha'}{1 - \alpha'(1 - \cos \Theta)} \quad (23)$$

zusammen; aus α' und Θ folgt die gestreute Frequenz im Kernsystem nach (6). (23) und (6) ergeben zusammen

$$\alpha'_0 = \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon)(1 - \cos \Theta)}, \quad d\alpha'_0 = \frac{d\varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2(1 - \cos \Theta)}. \quad (24)$$

Damit erhalten wir für die in das Frequenzintervall $d\varepsilon$ und das Winkelintervall $d\Omega$ gestreute Energie aus (23)

$$mc^2 \cdot d\eta(r, \varepsilon, \Theta) = F_\varepsilon \frac{d^2}{2} [(1 + \cos^2 \Theta)(1 - \varepsilon) + \varepsilon^2] d\varepsilon d\Omega. \quad (25)$$

F_ε hat denselben konstanten Wert wie $F_{\alpha'_0}$ in (21); die Bedingung $\alpha'_0 \leqq \frac{\lambda \xi}{r}$ formt sich nach (24) um in

$$\cos \Theta \leqq \frac{1 - \varepsilon \left(1 + \frac{r}{k \lambda \xi}\right)}{1 - \varepsilon}. \quad (26)$$

Diese Bedingung hat ungefähr den folgenden anschaulichen Sinn: Das Coulomb-Feld enthält nicht beliebig hohe Frequenzen, und es ist daher unter Umständen die vorgegebene Endfrequenz ε so hoch, daß sie im Streulicht gar nicht mehr vorkommen kann. Dies geschieht nach (26) am frühesten bei kleinen Streuwinkeln Θ ; denn hier verliert das Licht zwar beim Compton-Effekt nur wenig Energie, seine Frequenz wird aber durch die Lorentz-Transformation, die den Kern exakt zur Ruhe bringt, sehr stark herabgesetzt. Das unter $\Theta = \pi$ gestreute Licht hat dagegen höchstens (bei unendlich harter Primärstrahlung) die Compton-Frequenz, gewinnt aber durch die Lorentz-Transformation wieder den Faktor 2ξ . Bei hinreichend kleinen Maximalfrequenzen der Fourier-Analyse des Coulomb-Feldes (d. h. bei hinreichend großen Stoßabständen) wird jedoch die Streustrahlung unter keinem Winkel mehr genügend frequent sein; dem entspricht, daß (26) überhaupt nur erfüllbar ist, solange

$$\frac{r}{\lambda \xi} \leqq k \frac{2(1 - \varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (27)$$

Die im ganzen in das Frequenzintervall $d\varepsilon$ emittierte Energie ergibt sich durch Integration von (25) über alle durch (26) erlaubten Winkel. Die Rechnung wird noch vereinfacht, wenn wir von vornherein die Bedingung (27) in Betracht ziehen. Sie besagt, daß $r/\lambda \xi$ (außer für die im Gesamtresultat unwichtigen sehr kleinen Werte von ε) nicht wesentlich größer als 1 werden kann. An der unteren Grenze ($\sim \lambda$) ist diese Größe von der Ordnung $1/\xi$, und wir erhalten daher, wenn wir sie in den Formeln neben Größen der Ordnung 1 vernachlässigen, im ganzen nur einen Fehler in den Gliedern der Ordnung $1/\xi$.

Damit reduziert sich (26) auf die triviale Bedingung $\cos \Theta \leqq 1$, und wir erhalten

$$d\eta(r, \varepsilon) = 2\pi F_\varepsilon \frac{d^2}{mc^2} \left[\frac{4}{3}(1 - \varepsilon) + \varepsilon^2 \right] d\varepsilon. \quad (28)$$

Die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit ist gleich dieser Energie, dividiert durch die Energie des emittierten Quantums:

$$d w(r, \varepsilon) = \frac{d\eta}{\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \frac{Z^2 d^3}{\lambda r^2} \left[\frac{4}{3} (1 - \varepsilon) + \varepsilon^2 \right] \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (29)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird schließlich

$$d q(\varepsilon) = 2\pi \int_0^{2k\lambda\xi \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} d w(r, \varepsilon) r dr = \frac{4Z^2 d^3}{137} \left[\frac{4}{3} (1 - \varepsilon) + \varepsilon^2 \right] \log \frac{2k\xi(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (30)$$

Dieser Ausdruck ist mit dem ersten Glied von (14) bis auf den Zahlfaktor k unter dem Logarithmus identisch; die darin liegende Unbestimmtheit ist jedoch bereits von der Größenordnung der hier vernachlässigten Glieder.

§ 4. Erläuterungen und Ergänzungen. 1. Verzichten wir auf Ableitung des *differentiellen* Wirkungsquerschnitts, so lässt sich der für die Formel von Heitler und Sauter charakteristische Faktor $\log \xi$ durch die folgende zusammenfassende Überschlagsrechnung anschaulich herleiten. Die am Ort des Elektrons im ganzen durch die Flächeneinheit tretende Energie ist größenordnungsmäßig gleich dem Energiestrom mal der Stoßzeit t , d. h. nach (15) und wegen $|\mathfrak{E}| \simeq |\mathfrak{H}|$:

$$F \simeq c \mathfrak{E}_{\max}^2 \cdot t. \quad (31)$$

Die Fourieranalyse des Kernfeldes enthält mit gleicher Intensität alle Frequenzen von Null bis $1/t$. Die Energie pro Frequenzintervall ist also

$$F_{\omega'_0} d\omega'_0 \simeq c \mathfrak{E}^2 t^2 d\omega'_0 = c \left(\frac{Z e}{r^2} \xi \right)^2 \left(\frac{r}{c \xi} \right)^2 d\omega'_0 = \frac{Z^2 e^2}{c r^2} d\omega'_0. \quad (32)$$

Von allen Primärfrequenzen haben wir nun überhaupt nur diejenigen zu berücksichtigen, die nicht wesentlich größer als $\frac{mc^2}{h}$ ($\alpha_0 \lesssim 1$) sind. Denn wie sich aus (22) durch Lorentz-Transformation und Integration über die Winkel herleiten lässt, nimmt die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit für große α_0 wie $\frac{\log \alpha_0}{\alpha_0^3}$ ab. Der Faktor $\frac{1}{\alpha_0}$, um den sich dieser Ausdruck von der Streuwahrscheinlichkeit nach Klein und Nishina unterscheidet (diese geht ja mit $\frac{\log \alpha_0}{\alpha_0}$), führt von der Lorentz-Transformation her: der größte Teil der gesamten Streuenergie geht nach vorn — für große α_0 wird die Hälfte der Energie in das Winkelintervall zwischen $\Theta = \pm \frac{1}{\alpha_0}$

gestreut —, und dieser Anteil erhält bei der Lorentz-Transformation einen sehr kleinen Faktor. Die gesamte ausgestrahlte Energie wird also

$$\eta \simeq \xi d^2 \int_0^{\frac{mc^2}{\hbar}} F_{\omega'_0} d\omega'_0 = \xi d^2 \frac{mc^2}{\hbar} \frac{Z^2 e^2}{cr^2} = \frac{Z^2 d^2}{137} \cdot \frac{\xi m c^3}{r^2}. \quad (33)$$

Der Faktor d^2 , der in (33) auftritt, röhrt von der Thomson- bzw. Klein-Nishina-Formel her, der Faktor ξ von der Lorentz-Transformation (vgl. § 1). Bei der Integration über die Stoßabstände wählen wir nun als untere Grenze wieder λ , und als obere Grenze $\lambda\xi$, da oberhalb dieses Abstandes nach § 1 die klassische Abschätzung gilt, deren Gesamtergebnis von der hier vernachlässigten Größenordnung ist. So folgt für den Wirkungsquerschnitt

$$q \simeq \int_{\lambda}^{\lambda\xi} \frac{\eta}{\xi m c^3} r dr = \frac{Z^2 d^2}{137} \int_{\lambda}^{\lambda\xi} \frac{dr}{r} = \frac{Z^2 d^2}{137} \log \xi. \quad (34)$$

2. Da wesentliche Beiträge zur Ausstrahlung, insbesondere das logarithmische Anwachsen mit ξ , von großen Stoßabständen herrühren, ist es klar, daß die Berücksichtigung der Abschirmung die Formel wesentlich ändern wird. Qualitativ läßt sich die Änderung leicht übersehen, wenn wir als obere Grenze der Integration in (34) nicht $\lambda\xi$, sondern (für $\xi > 137 Z^{-1/3}$) den Abschirmungsradius $a_0 Z^{-1/3}$ (a_0 = Wasserstoffradius) einsetzen; wir erhalten

$$q \simeq \frac{Z^2 d^2}{137} \log \frac{a_0 Z^{-1/3}}{\lambda} = \frac{Z^2 d^2}{137} \log \frac{137}{Z^{1/3}}, \quad (35)$$

in Übereinstimmung mit der ersten Näherung der von Bethe (l. c.) abgeleiteten Formel.

In der bisher benutzten, hier freilich nicht mehr sehr genauen Näherung, in der das erste, logarithmische Glied der Formel für den Wirkungsquerschnitt als groß gegen die übrigen angesehen wird, läßt sich übrigens auch der differentielle Wirkungsquerschnitt für ein abgeschirmtes Feld nach der Thomas-Fermi-Methode ohne neue Rechnung bestimmen. Zunächst ist es klar, daß sich für Frequenzen des emittierten Lichtes, bei denen der durch (27) gegebene obere Grenzradius kleiner ist als der Abschirmungsradius, gar nichts ändert. Für die übrigen Frequenzen haben wir zu beachten, daß (28), vom Werte der Funktion F_s abgesehen, ohne Bezugnahme auf die spezielle Form des Atompotentials abgeleitet ist. Bei Stoßabständen, die klein gegen den Abschirmungsradius sind, gilt das Coulomb-Gesetz in hinreichender Näherung; hier dürfen wir daher für F_s den im Coulomb-

Feld gültigen Wert benutzen. Im äußeren Gebiet fällt F_ε relativ rasch gegen Null ab. Wir berücksichtigen das hinreichend genau durch Einsetzung eines Stoßabstandes der Größenordnung $a_0 Z^{-1/3}$ als oberer Integrationsgrenze; der Faktor von der Größenordnung 1, um den dieser Abstand dabei unbekannt bleibt, tritt nur unter dem Logarithmus auf, wo in der verwendeten Methode ohnehin ein Zahlfaktor unbestimmt ist. Wir erhalten so

$$dq(\varepsilon) = \frac{4Z^2 d^2}{137} \left[\frac{4}{3}(1 - \varepsilon) + \varepsilon^2 \right] \log \frac{137}{Z^{1/3}} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (36)$$

3. Schließlich soll ein möglicher Einwand gegen die hier verwendete Rechenmethode noch kurz besprochen werden. Wir haben die Streuung jeder Fourier-Komponente für sich berechnet, ohne uns um die Phasenbeziehung zu kümmern, die zwischen ihnen besteht. Es ist die Frage, ob nicht die Interferenz der Streuwellen unsere Resultate für die emittierte Energie ändern könnte. Zur Illustration der Wichtigkeit der Phasenbeziehungen könnte darauf hingewiesen werden, daß das Coulomb-Feld einen einseitigen Stoß auf das Elektron ausübt, während die einzelnen ebenen Wellen, aus denen wir es superponieren, die Richtung auf den Kern zu gar nicht vor der vom Kern weg auszeichnen.

Die Näherung, in der die Phasenbeziehungen wichtig werden, ist jedoch von der hier verwendeten verschieden. Z. B. wird ja die Einseitigkeit des Coulomb-Feldes formal durch die Fourier-Komponente mit unendlicher Wellenlänge beschrieben; die physikalische Schwierigkeit besteht nur darin, daß beim Stoß ein endlicher Energiebetrag auf das Elektron übertragen wird, dem eine Energieentnahme aus den Fourier-Komponenten eines endlichen Frequenzbereiches entsprechen muß. D. h. die Einseitigkeit des Stoßes wird ein Problem erst in der Näherung, in der wir uns für die Rückwirkung des Elektrons auf das primäre Strahlungsfeld interessieren müssen. Hierin spricht sich der allgemeine Sachverhalt aus, daß wir die Wirkungen eines Feldes auf ein Elektron solange unabhängig superponieren dürfen, als die Kopplung zwischen Feld und Elektron klein ist.

Über die Gültigkeitsgrenzen dieser Voraussetzung, die natürlich auch dem Näherungsverfahren der eingangs zitierten Arbeiten zugrunde liegt, führen unsere bisherigen Betrachtungen zu folgendem Schluß. Allgemein ist ein Versagen der Näherung erst zu erwarten, wenn Lineardimensionen von der Größenordnung des Elektronenradius wesentlich ins Spiel kommen. Da für $\xi > 137$ die Fourier-Analyse des Coulomb-Feldes auch für Stoßradien $> \lambda$ Wellenlängen von dieser Größenordnung enthält, würde man

zunächst vermuten, daß $\xi \simeq 137$ die obere Grenze für die Gültigkeit unserer Formeln wäre. Hier ist aber zu beachten, daß nach Nr. 1 dieses Paragraphen der gesamte Effekt von Wellenlängen herröhrt, die nicht wesentlich kleiner als λ sind, unabhängig davon, wie kurzwellige Fourier-Komponenten das Feld noch enthält. Wenn wir also nur die plausible Annahme machen, daß die sehr kurzen Wellenlängen nicht wieder großesordnungsmäßig stärker gestreut werden, als es nach Klein-Nishina zu erwarten wäre, dürfen wir unsere Formeln auch für beliebig große ξ noch als richtig ansehen.

Die vorliegende Arbeit ist die Ausarbeitung der Resultate einiger Diskussionen, die vom September 1933 an im Kopenhagener Institut unter Leitung von Herrn Prof. N. Bohr stattfanden, und zu denen vor allem die Herren G. Beck, W. Heisenberg, L. Landau, E. Teller und E. J. Williams wesentliche Beiträge lieferten. — Ich möchte diese Gelegenheit gern benutzen, um Herrn Prof. Bohr für die schöne und fruchtbare Zeit, die ich in seinem Institut zubringen durfte, meinen herzlichsten Dank auszudrücken.
