4.2 Welle und Teilchen

4.2.1 Der Photoeffekt

Bei Bestrahlung mit kurzwelligem Licht werden aus einer Metallplatte Elektronen ausgelöst (Photoeffekt). Im Gegensatz zu den Erwartungen der klassischen Physik ist die kinetische Energie W_{kin} der Elektronen nicht proportional zur Intensität der Welle sondern zu deren Frequenz. Einsteins Erklärung war, daß kurzwelliges Licht sich wie Teilchen der Energie

$$W_\gamma = hf \tag{165}$$

verhält. Die Plancksche Konstante h (das „Wirkungsquantum") hat den Wert $h = 4.136 \cdot 10^{-15}$ eVs. Damit gilt der Energiesatz für den Photoeffekt

$$W_{\text{kin}} = hf - W_0 \ , \tag{166}$$

worin W_0 die Auslöse-Energie der Elektronen aus dem Metall bedeutet, das ist die Energie, mit der die Elektronen im Metall gebunden sind.

4.2.2 Lichtquanten

Nach der Hypothese Einsteins wird einer elektromagnetischen Welle ein Strom von Lichtquanten oder Photonen der Energie $W_\gamma = hf = \hbar\omega$ mit $\hbar = h/(2\pi)$ zugeordnet. Nichtrelativistische Teilchen der Geschwindigkeit v ($v \ll c_0$) haben den Impuls

$$p = mv \ , \tag{167}$$

da das Newtonsche Kraftgesetz als

$$\Delta p = \int F dt \tag{168}$$

geschrieben werden kann. Dies haben wir bei der Ableitung des Gasdrucks in Abschnitt 4.1.2 benutzt. Eine elektromagnetische Welle der Intensität I übt bei der Reflexion an einer Wand auch eine Kraft aus, die zu

$$F = \frac{2}{c_0} I A \tag{169}$$

bestimmt wird, es gilt also

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2}{c_0}\frac{dW}{dt} \tag{170}$$

und daher wird (wegen $\Delta p = N_\gamma \Delta p_\gamma = 2N_\gamma p_\gamma$) den Quanten der Energie hf der Impuls

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \tag{171}$$

zugeordnet. Die Quanteneffekte werden deutlich ab $\lambda < 0.3$ nm, die typische Wellenlänge von Röntgenstrahlung ($W = 50$ keV) ist $2.5 \cdot 10^{-2}$ nm.

4.2.3 Materiewellen

Bei der Rückstreuung von Elektronen an Kristalloberflächen oder der Streung beim Durchtritt durch dünne Folien entstehen Verteilungen der Streuwinkel, die denen von Licht an einem Gitter gleichen, d.h. es gibt Maxima und Minima mit dem ersten Maximum bei einem Winkel von

$$\sin\Theta = \frac{h}{pd} \ , \tag{172}$$

wobei d der Abstand der Atome im Kristall ist. Der Vergleich mit dem Gitter ergibt, daß den Elektronen eine Materiewelle (de Broglie) zugeordnet werden muß, deren Wellenlänge durch

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{173}$$

wie in (171) gegeben ist. Die Frequenz der Welle ist durch

$$f = \frac{W_{\text{kin}}}{h} \tag{174}$$

festgelegt. Damit wird eine experimentelle Bestimmung einfach, da W_{kin} durch die Beschleunigungsenergie eU gemessen werden kann. Eine wichtige Anwendung ist die Reflexion von Neutronen (oder γ-Quanten) an Kristallgittern mit der Bragg-Bedingung

$$\cos\alpha = \frac{n\lambda}{2d} \ , \tag{175}$$

worin d der Abstand der Netzebenen und α der Ein- bzw. Ausfallswinkel ist.

4.2.4 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Zuordnung einer Welle zu einem Teilchen führt unvermeidlich zu Interferenzerscheinungen, wie wir gerade gesehen haben. Dazu gehört auch die Beugung. In einem Gedankenexperiment kann man die Beugung einer Materiewelle an einem einzelnen Spalt der Breite D betrachten. Das erste Minimum der Intensität liegt dann bei $\sin\Theta = \lambda/D$. Der Spalt steht entlang der y-Achse eines Koordinatensystems. Nach dem Spalt hat der Impuls, der vor dem Spalt nur die Richtung der z-Achse hatte, eine Komponente entlang der y-Achse, die durch $p_y = p_z \tan\Theta$

festgelegt ist. In der Kleinwinkelnäherung werden also die Werte des Impulses in der y-Richtung durch

$$p_y \approx \frac{h}{D} \tag{176}$$

oder $p_y D \approx h$ abgeschätzt. Es ist also grundsätzlich nicht möglich, den Impuls in y-Richtung beliebig genau festzulegen. In einer mathematisch schärferen Analyse leitete W. Heisenberg die grundsätzliche Genauigkeitsgrenze für die kombinierte Messung von Ort und Impuls eines Teilchens ab

$$\Delta p_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2} \ . \tag{177}$$

Für Abschätzungen der Unsicherheit in Ort und Impuls (ohne Angaben einer Koordinate) kann $\Delta p \Delta r \geq \hbar$ verwendet werden. Beispiel: Ein Elektron, das sich in einem Atom befindet ($\Delta r = 0.1$ nm), hat allein aufgrund dieser Tatsache einen Impuls > 2000 eV/c, was einer kinetischen Energie von 4 eV entspricht! Beim Rechnen mit Formeln, die das Plancksche Wirkungsquantum enthalten, ist die Benutzung der Beziehung

$$\hbar c_0 = 197.33 \ \text{MeV fm} \tag{178}$$

sehr nützlich.